TD 6. Séries de Fourier.

Exercice 1.(∗∗) Soit $T \in \mathbb{R}$ et $f = \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne 2π périodique. Montrer que si f est à valeurs réelles positives, alors

$$\int_{[0,2\pi]} f = \int_{[T,T+2\pi]} f.$$

Montrer que si f est à valeurs complexes et intégrable sur $[0, 2\pi]$, alors elle est aussi intégrable sur $[T, T + 2\pi]$ et que la formule ci-dessus est encore valide.

Exercice 2.(∗∗) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $\varphi(t) = e^{int}$ pour $t \in \mathbb{T}$ et pour un $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\varphi * f)(t) = \hat{f}(n)e^{int}$.
2. Soit $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$. Montrer que
$$(P * f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \hat{f}(n) e^{int}.$$
3. Calculer $\hat{P}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer $\widehat{(f \cdot P)}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.(∗∗) Pour $n \in \mathbb{N}$ on on définit les noyaux de Dirichlet et de Féjer par

$$D_n := \sum_{k=-n}^{n} e_k \quad \text{et} \quad F_n := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=-j}^{j} e_k.$$

1. Que valent $\int_{\mathbb{T}} D_n$ et $\int_{\mathbb{T}} F_n$?
2. Calculer D_n et montrer que pour tout $t \in \mathbb{T}$
$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2.$$
3. Montrer que
$$F_n = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1} \right) e_j.$$
4. Étant donné $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{N}$ on introduit les fonctions (polynômes trigonométriques)
$$S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e_k \quad \text{et} \quad \sigma_n(f) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k(f).$$
Montrer que
$$S_n(f) = D_n * f \quad \text{et} \quad \sigma_n(f) = F_n * f = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1} \right) \hat{f}(j)\, e_j.$$

Exercice 4.($*$)

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que si (P_k) est une suite de polynômes de degré au plus N tel que $\widehat{P_k}(n) \to a_n$ pour $|n| \leq N$, alors (P_k) converge dans $L^1(\mathbb{T})$ vers $P = \sum_{n=-N}^{n} a_n\, e_n$.
2. Soit P un polynôme trigonométrique. Démontrer directement (sans utiliser de théorème du cours) que les suites $P * D_n$ et $P * F_n$ convergent tous P dans L^1, où (D_n) et (F_n) sont les noyaux de Dirichlet et Féjer, respectivement.

Exercice 5.($*$) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Montrer qu'elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $m \in \mathbb{N}$. On note $f_m(t) = f(mt)$. Montrer que $\widehat{f_m}(n) = \hat{f}(\frac{n}{m})$ si $m \mid n$ et $\widehat{f_m}(n) = 0$ si $m \not| n$

Exercice 7.($**$) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que $\sum |a_n| < \infty$. On peut définir (convergence normale) la somme de la série de fonctions continues $f(t) = \sum a_n e^{int}$. Montrer que pour $g \in L^1(\mathbb{T})$ on a

$$f * g = \sum a_n\, \hat{g}(n)\, e_n,$$

et que $\hat{f}(n) = a_n$ pour tout n.

Exercice 8. Calculer les coefficients de Fourier des fonctions suivantes :

1. $$f(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq |t| \leq \pi \end{cases}$$
2. $$v(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & 1 \leq |t| \leq \pi \end{cases}$$
3. $$g(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t \leq 0 \\ -1 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 \leq |t| \leq \pi \end{cases}$$
4. $$h(t) = t \text{ pour } |t| < \pi.$$

Exercice 9.($*$) **(Lemme de Fejér)** Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int f(t)g(nt)dt = \hat{f}(0)\hat{g}(0).$$

Indication : approximer $f \in L^1(\mathbb{T})$ par des polynômes trigonométriques.

Exercice 10.($**$) On note F_n le noyau de Fejer. On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction K_n sur $\mathbb{T}$ donnée sur $[0, \pi]$ par $K_n(t) = n + 1$ sur $[0, \frac{\pi}{n+1}]$ et $K_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{\pi^2}{t^2}$ pour $t \in [\frac{\pi}{n+1}, \pi]$; sur $[-\pi, 0]$ on prendra $K_n(-t) = K_n(t)$. Montrer que

$$0 \leq F_n \leq K_n \quad \text{sur } \mathbb{T}$$

et que K_n vérifie :

— pour tout n la fonction K_n est positive, paire et <u>décroissante</u> sur $[0,\pi]$;

— $\sup\limits_n \int_{\mathbb{T}} K_n < +\infty$;

— $K_n(t) \to 0$ pour $t \neq 0$.

Exercice 11.(∗) **(Bernstein)** Soit P un polynôme trigonométrique de degré n. Montrer que

$$\sup_t |P'(t)| \leq 2n \sup_t |P(t)|.$$

Indication : $P' = -P * (2nF_{n-1}(t)\sin(nt))$ et $||2nF_{n-1}\sin(nt)||_1 < 2n$.

Exercice 12. Soit $0 < \alpha \leq 1$ et soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Supposons qu'au point $t_0 \in \mathbb{T}$ la fonction f est Lipschitzienne d'ordre α : pour tout $|\tau| < \pi$

$$|f(t_0+\tau) - f(t_0)| < K|\tau|^\alpha.$$

Montrer que pour $0 < \alpha < 1$ on a

$$|F_n * f(t_0) - f(t_0)| \leq \frac{\pi+1}{1-\alpha} K n^{-\alpha}$$

et pour $\alpha = 1$ on a

$$|F_n * f(t_0) - f(t_0)| \leq 2\pi K \frac{\log n}{n}.$$

Exercice 13. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ telle que $|\hat{f}(n)| \leq K n^{-1}$. Montrer que pour tout n et pour tout $t \in \mathbb{T}$ on a

$$|S_n(f)(t)| \leq ||f||_\infty + 2K.$$

En déduire que

$$\left| \sum_{j=1}^n \frac{\sin jt}{j} \right| \leq \frac{\pi}{2} + 1.$$

Indication : considerer $f(t) = \frac{t}{2}$ sur $[0, 2\pi[$.

Exercice 14. Soit f une fonction absolument continue sur $\mathbb{T}$ telle que $f' \in L^2(\mathbb{T})$. Montrer que

$$\sum |\hat{f}(n)| \leq ||f||_1 + \left(2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} ||f'||_2.$$

Exercice 15.(∗) Soient $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Montrer que la série des coefficients de Fourier de $f * g$ est absolument convergente (i.e. $f * g$ appartient à l'algèbre de Wiener).

Exercice 16. Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de nombres complexes. Soient $B_k = \sum_{n=1}^k b_k$ et $B_0 = 0$.

1. Montrer la formule de sommation par parties :
$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$
2. En déduire le critère de convergence de Dirichlet pour les séries : si la suite $(B_n)_n$ est bornée et la suite $(a_n)_n$ décroît vers 0, alors $\sum_n a_n b_n$ converge.

Exercice 17. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ et soit $l \in \mathbb{N}$. On suppose que
$$\hat{f}(k) \leq \frac{C}{|k|^{l+1+\epsilon}},$$
pour $C > 0$, $\epsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que $f \in C^l$. *Indication :* On commence par $l = 0$ et ensuite on fait une récurrence sur l. Pour $l = 0$ montrer que $S_N(f)$ converge uniformément et absoluement. En déduire que la limite est continue et qu'elle vaut f p.p.

Exercice 18. $(*)$ On définit, pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $u(r, \theta) = \frac{\partial P_r}{\partial \theta}$, où $P_r(\theta)$ est le noyau de Poisson. On pourra voir cette fonction comme une fonction sur le disque, en posant $\tilde{u}(x, y) = \tilde{u}(r\cos\theta, r\sin\theta) = u(r, \theta)$. Montrer que

1. $\triangle \tilde{u} = 0$ sur le disque (ouvert).
2. $\lim_{r\to 1} u(r, \theta) = 0$ pour tout θ.
3. Montrer que la convergence précédente n'est pas uniforme.
   On pourra regarder $\tilde{u}(1-\epsilon, \epsilon) \to -\infty$ *quand* $\epsilon \to 0$.

Exercice 19. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$.

1. Montrer que
$$\hat{f}(n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inx} dx.$$
2. Supposons que f satisfait à une condition de Hölder d'ordre α, pour un $0 < \alpha \leq 1$:
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha,$$
   avec $C > 0$ et pour tout x, h. Montrer que $\hat{f}(n) = O(\frac{1}{|n|^\alpha})$.
3. Montrer qu'on ne peut pas améliorer le résultat précédent en considérant
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}.$$
   On montrera que f satisfait à une condition de Hölder d'ordre α et $\hat{f}(N) = \frac{1}{N^\alpha}$ pour $N = 2^k$.

Exercice 20. Soit f une fonction 2π périodique, lipschitzienne avec une constante de Lipschitz $K > 0$: pour tout x, y
$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$
On a $\hat{f}(n) = O(\frac{1}{|n|})$, mais nous allons montrer que la série de Fourier de f est absoluement et uniformément convergente.

1. Soit $h > 0$. On définit $g_h(x) = f(x+h) - f(x-h)$. Montrer que
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_h(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 4|\sin(nh)|^2|\hat{f}(n)|^2.$$
En déduire que
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\sin(nh)|^2|\hat{f}(n)|^2 \leq K^2h^2.$$
2. Soit $h = \frac{\pi}{2^{p+1}}$. Montrer que :
$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$
3. Majorer $\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p} |\hat{f}(n)|$ et en déduire que la série de Fourier de f converge absolument, donc uniformément.

Exercice 21.$(*)$ Soit $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π périodique définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x) = \cos(\alpha x)$.
2. Montrer les formules suivantes, dues à Euler :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha\tan(\alpha\pi)}.$$
Montrer que pour tout $u \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ on a
$$\cot(u) = \frac{1}{u} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u}{u^2-n^2\pi^2}.$$
3. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$
$$\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} = 1 + 2\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2}.$$

Exercice 22. (Phénomène de Gibbs) On considère la fonction 2π périodique définie par
$$g(t) = \begin{cases} \pi - x, & x \in]0,2\pi[\\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
On note $S_n(g)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{g}(k)e^{ikt}$.

1. Montrer que $|S_n(g)(t)| \leq \pi + 2$ pour tout $t \in [0,2\pi]$.
2. Montrer que $\frac{\partial}{\partial t}(S_n(g)(t) - g(t)) = D_n(t)$, où $D_n(t)$ est le noyau de Dirichlet.
On note
$$S_n(g)(t) - g(t) = \Delta_n(t).$$

3. Montrer que le premier $t > 0$ où Δ_n atteint un maximum local est au point $\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}$.

4. Calculer $\lim_{n\to\infty} \Delta_n \left(\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\right)$.

Exercice 23. Montrer que les constantes de Lebesgue $L_n = ||D_n||_1$ vérifient :

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1).$$

Indication : Montrer que

$$L_n = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t} dt + O(1)$$

et

$$\int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}} \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right| dt = \frac{2}{n+\frac{1}{2}}.$$

On pourra utiliser, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2t}{\pi} \leq \sin t \leq t$ et $0 \leq t - \sin t \leq \frac{t^3}{3}$.

Exercice 24.(*) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum_k f(x + 2\pi k)$ converge dans $L^1(\mathbb{T})$ vers une fonction qu'on appelle Pf telle que $||Pf||_{L^1(\mathbb{T})} \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R})}$. Montrer que de plus

$$\widehat{Pf}(k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Exercice25. (*) (**Formule de sommation de Poisson**) Soit $f \in C(\mathbb{R})$ telle que $|f(x)| \leq C(1+|x|)^{-1-\epsilon}$ et $|\hat{f}(k)| \leq C(1+|k|)^{-1-\epsilon}$ pour $C, \epsilon > 0$. Montrer que

$$\sum_k f(x + 2\pi k) = \sum_k \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Exercice26. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{T})$ (ou $f \in C(\mathbb{T})$ si $p = \infty$) on a

$$||S_n f - f||_p \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

2. On a $\sup_N ||S_N||_{p\to p} < \infty$, où $||S_N||_{p\to p} = \sup_{||f||_p=1} ||S_N f||_p$.