TD 6. Séries de Fourier.

Exercice 1.(∗∗) Soit $T \in \mathbb{R}$ et $f = \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne 2π périodique. Montrer que si f est à valeurs réelles positives, alors

$$\int_{[0,2\pi]} f = \int_{[T,T+2\pi]} f.$$

Montrer que si f est à valeurs complexes et intégrable sur $[0, 2\pi]$, alors elle est aussi intégrable sur $[T, T + 2\pi]$ et que la formule ci-dessus est encore valide.

Solution de l'exercice 1. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi n \leq T < 2\pi(n+1)$. Alors, par invariance par translation de la mesure de Lebesgue et 2π-périodicité de la fonction positive f on a

$$\int_{[T,T+2\pi]} f = \int_{[T,2\pi(n+1)]} f + \int_{[2\pi(n+1),T+2\pi]} f = \int_{[T-2n\pi,2\pi]} f + \int_{[0,T-2n\pi]} f = \int_{[0,2\pi]} f.$$

Pour f à valeurs complexe, l'égalité appliquée à $|f|$ assure que l'on a l'intégrabilité voulue. En décomposant en parties réelles et imaginaires, puis parties positives et négatives, et en utilisant la linéarité de l'intégrale sur les fonctions intégrables, on obtient le résultat.

Exercice 2.(∗∗) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $\varphi(t) = e^{int}$ pour $t \in \mathbb{T}$ et pour un $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\varphi * f)(t) = \hat{f}(n)e^{int}$.
2. Soit $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$. Montrer que
$$(P * f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \hat{f}(n) e^{int}.$$
3. Calculer $\hat{P}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer $\widehat{(f \cdot P)}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 2.

1. Par calcul direct $(\varphi * f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in(t-\tau)} f(\tau)d\tau = \hat{f}(n)e^{int}$.
2. Par linárité de l'intégrale et la question précédente.
3. Par calcul direct $\hat{P}(n) = a_n$ si $|n| \leq N$ et $\hat{P}(n) = 0$ si $|n| > N$.
4. Le calcul direct donne $\widehat{(f \cdot P)}(n) = \sum_{l=-N}^{N} a_l \hat{f}(n - l)$.

Exercice 3.(∗∗) Pour $n \in \mathbb{N}$ on on définit les noyaux de Dirichlet et de Féjer par

$$D_n := \sum_{k=-n}^{n} e_k \quad \text{et} \quad F_n := \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=-j}^{j} e_k.$$

1. Que valent $\int_{\mathbb{T}} D_n$ et $\int_{\mathbb{T}} F_n$?
2. Calculer D_n et montrer que pour tout $t \in \mathbb{T}$
$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right)^2.$$
3. Montrer que
$$F_n = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e_j.$$
4. Étant donné $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{N}$ on introduit les fonctions (polynômes trigonométriques)
$$S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e_k \quad \text{et} \quad \sigma_n(f) := \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(f).$$
Montrer que
$$S_n(f) = D_n * f \quad \text{et} \quad \sigma_n(f) = F_n * f = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \hat{f}(j)\, e_j.$$

Solution de l'exercice 3.
1) Par linéarité, on obtient que les intégrales valent 1.

2) Le calcul classique donne $D_n = e^{-n}\sum_{k=0}^{2n} e_k = \frac{\sin\left((2n+1)t/2\right)}{\sin(t/2)}$ où cette expression est sous-entendu prolongée par continuité en 0 (on sait qu'on a affaire à un polynôme...), et la formule pour F_n s'en déduit.

3) C'est un calcul (des coefficients de Fourier de F_n).

4) Se déduit immédiatement des propriété de la convolution avec un polynôme trigonométrique (voir par exemple l'exercice précédent)

Exercice 4.$(*)$

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que si (P_k) est une suite de polynômes de degré au plus N tel que $\widehat{P_k}(n) \to a_n$ pour $|n| \leq N$, alors (P_k) converge dans $L^1(\mathbb{T})$ vers $P = \sum_{n=-N}^{n} a_n\, e_n$.
2. Soit P un polynôme trigonométrique. Démontrer directement (sans utiliser de théorème du cours) que les suites $P * D_n$ et $P * F_n$ convergent tous P dans L^1, où (D_n) et (F_n) sont les noyaux de Dirichlet et Féjer, respectivement.

Solution de l'exercice 4. 1) On remarque que pour P de degré au plus N, on a $P(t) = \sum_{|n|\leq N} \hat{P}(n)e^{int}$ et par conséquent
$$\|P\|_1 \leq \sum_{|n|\leq N} |\hat{P}(n)|.$$
Le résultat s'ensuit, par linéarité.

2) Notons N le degré de P. Pour $n \geq N$ on a $D_n * P = P$, donc on a bien la convergence voulue ! D'autre par, $P * F_n$ est de degré au plus N et on a, pour $j \in \mathbb{Z}$ (seul $|j| \leq N$ intevient)

$$\widehat{P * F_n}(j) = \widehat{F_n}(j)\hat{P}(j) = \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \hat{P}(j) \longrightarrow \hat{P}(j).$$

Cela permet de conclure grace au 1).

Exercice 5.($*$) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Montrer qu'elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 5. On pourrait dire que cela correspond à une fonction continue sur le tore, qui est compact, et donc elle est uniformément continue sur le tore, d'où on en déduirait l'uniforme continuité sur $\mathbb{R}$.

De manière moins maline, on dit qu'elle est uniformément continue sur $[-1, 2\pi + 1]$ et deux réels x, y à distance plus petite que 1 ont des représentants modulo 2π dans $[-1, 2\pi+1]$.

Exercice 6. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $m \in \mathbb{N}$. On note $f_m(t) = f(mt)$. Montrer que $\widehat{f_m}(n) = \hat{f}(\frac{n}{m})$ si $m \mid n$ et $\widehat{f_m}(n) = 0$ si $m \not| n$

Solution de l'exercice 6. Si $m \mid n$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = km$. Après un changement de variable on a $\widehat{f_m}(n) = \frac{1}{2\pi m}\int_0^{2\pi m} e^{-ikt} f(t)dt = \hat{f}(k)$, en utilisant la 2π périodicité de f et de e^{-ikt}. Si $m \not| n$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq m-1$ tels que $n = km + r$. En faisant un changement de variable comme précédement on a

$$\widehat{f_m}(n) = \frac{1}{2\pi m}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t) \sum_{j=0}^{m-1} e^{i\frac{r}{m}(t+2j\pi)} dt = \frac{1}{2\pi m}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t) e^{i\frac{r}{m}t} \sum_{j=0}^{m-1} e^{i\frac{2jr\pi}{m}} dt = 0$$

car $\sum_{j=0}^{m-1} e^{i\frac{2jr\pi}{m}} = \sum_{j=0}^{m-1} z_j^r = 0$ où z_j sont les racines $m-$ième de l'unité et $1 \leq r \leq m-1$.

Exercice 7.($**$) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que $\sum |a_n| < \infty$. On peut définir (convergence normale) la somme de la série de fonctions continues $f(t) = \sum a_n e^{int}$. Montrer que pour $g \in L^1(\mathbb{T})$ on a

$$f * g = \sum a_n \, \hat{g}(n) \, e_n,$$

et que $\hat{f}(n) = a_n$ pour tout n.

Solution de l'exercice 7. Remarquons que comme $\hat{f}(n)$ est bornée (et même tend vers zéro), la série est encore bien définie, par convergence normale sur $\mathbb{T}$. Il s'agit de justifier la permutation de l'intégrale et de la série, ce qui découle de la convergence normale (puisque on travaille sur un espace de mesure finie). En effet, pour $t \in \mathbb{T}$ fixé,

$$\int_{\mathbb{T}} \sum_{\mathbb{Z}} \left| a_n e^{in(x-t} g(x) \right| dx \leq \int_{\mathbb{T}} \sum_{\mathbb{Z}} |a_n| \, |g(x)| \, dx = \|g\|_1 \sum |a_n| < \infty.$$

Le même argument donne le coefficient de Fourier. On peut aussi appliquer la formule précédente à $g = e_k$, auquel cas d'un côté $f * e_k = \hat{f}(k) \, e_k$ et de l'autre $f * e_k = \sum a_n \hat{e}_k(n) e_n = a_k \, e_k$.

Exercice 8. Calculer les coefficients de Fourier des fonctions suivantes :

1.
$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq |t| \leq \pi \end{cases}$$

2.
$$v(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & 1 \leq |t| \leq \pi \end{cases}$$

3.
$$g(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t \leq 0 \\ -1 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 \leq |t| \leq \pi \end{cases}$$

4.
$$h(t) = t \text{ pour } |t| < \pi.$$

Solution de l'exercice 8.

1. $\hat{f}(0) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ et pour $n \neq 0$ $\hat{f}(n) = \frac{\sqrt{2}}{n\pi} \sin(\frac{n}{2})$.
2. $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}$ et pour $n \neq 0$ $\hat{f}(n) = \frac{2}{n^2\pi^2} \sin^2(\frac{n}{2})$.
3. $\hat{f}(0) = 0$ et pour $n \neq 0$ $\hat{f}(n) = \frac{2}{in\pi} \sin^2(\frac{n}{2})$.
4. $\hat{f}(0) = 0$ et pour $n \neq 0$ $\hat{f}(n) = \frac{(-1)^n}{in}$.

Exercice 9.($*$) **(Lemme de Fejér)** Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int f(t)g(nt)dt = \hat{f}(0)\hat{g}(0).$$

Indication : approximer $f \in L^1(\mathbb{T})$ par des polynômes trigonométriques.

Solution de l'exercice 9. Supposons $f(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt}$. Alors en utilisant le résultat de l'éxo 2,
$$\int f(t)g(nt)dt = \int \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt} g(nt)dt = \sum_{k=-N;n|k}^{N} a_k \hat{g}(\frac{k}{n}).$$
En considérant $n > N$ on a seulement $k = 0$ comme solution de $|k| \leq N$ et $n|k$. Donc $\int f(t)g(nt)dt = a_0\hat{g}(0) = \hat{f}(0)\hat{g}(0)$. Soit $(f_m)_m$ une suite de polynômes trigonométriques qui approchent f en norme L^1. Soit $\epsilon > 0$ et soit $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq N_\epsilon$ $||f - f_m||_1 \leq \epsilon$. Alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|\hat{f}(k) - \hat{f}_m(k)| \leq \epsilon$. De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m > N_\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$,
$$|\int (f(t) - f_m(t))g(nt)dt| \leq ||f - f_m||_1 ||g||_\infty \leq \epsilon ||g||_\infty.$$
On a donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe N_ϵ tel que pour tout $n > N_\epsilon$ (on choisit $m \in \mathbb{N}$, $N_\epsilon \leq m < n$) on a :
$$|\int f(t)g(nt)dt - \hat{f}(0)\hat{g}(0)| \leq ||f - f_m||_1 ||g||_\infty + |\hat{f}_m(0) - \hat{f}(0)||\hat{g}(0)| \leq 2\epsilon ||g||_\infty.$$
Ceci permet de conclure.

Exercice 10.($**$) On note F_n le noyau de Fejer. On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction K_n sur $\mathbb{T}$ donnée sur $[0, \pi]$ par $K_n(t) = n+1$ sur $[0, \frac{\pi}{n+1}]$ et $K_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{\pi^2}{t^2}$ pour $t \in [\frac{\pi}{n+1}, \pi]$; sur $[-\pi, 0]$ on prendra $K_n(-t) = K_n(t)$. Montrer que

$$0 \leq F_n \leq K_n \quad \text{sur } \mathbb{T}$$

et que K_n vérifie :

— pour tout n la fonction K_n est positive, paire et décroissante sur $[0, \pi]$;

— $\sup_n \int_{\mathbb{T}} K_n < +\infty$;

— $K_n(t) \to 0$ pour $t \neq 0$.

Solution de l'exercice 10. D'une part, on utilise , comme précédemment, que $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (dessin) et que donc

$$\forall t \in]0, \pi], 0 \leq F_n(t) \leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^2(t/2)} \leq \frac{\pi^2}{n+1}\frac{1}{t^2}.$$

Et d'autre part, comme $|\sin(kx)| \leq k|\sin(x)|$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ (exo ; TAF par exemple), on observe que $0 \leq F_n \leq n+1$ sur $\mathbb{T}$.

Exercice 11.($*$) **(Bernstein)** Soit P un polynôme trigonométrique de degré n. Montrer que

$$\sup_t |P'(t)| \leq 2n \sup_t |P(t)|.$$

Indication : $P' = -P * (2nF_{n-1}(t)\sin(nt))$ et $||2nF_{n-1}\sin(nt)||_1 < 2n$.

Solution de l'exercice 11. On note

$$\tilde{F}_n(t) = 2nF_{n-1}(t)\sin(nt) = -i\sum_{j=1}^{2n-1}(n - |j-n|)e^{ijt} + i\sum_{j=-2n+1}^{-1}(n - |j+n|)e^{ijt}.$$

Par calcul direct on a $P * \tilde{F}_n(t) = -i\sum_{j=-n}^{n} ja_je^{ijt} = -P'(t)$. Par ailleurs $\|\tilde{F}_n\|_1 = ||F_{n-1}||_1 = 1$ donc $||2nF_{n-1}\sin(nt)||_1 \leq 2n||F_{n-1}||_1||\sin(nt)||_\infty = 2n$. On conclut en utilisant que (c'est une forme trivial d'inégalité d'Young)

$$\|P * \tilde{F}_n\|_\infty \leq \|P\|_\infty \|\tilde{F}_n\|_1.$$

Exercice 12. Soit $0 < \alpha \leq 1$ et soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Supposons qu'au point $t_0 \in \mathbb{T}$ la fonction f est Lipschitzienne d'ordre α : pour tout $|\tau| < \pi$

$$|f(t_0 + \tau) - f(t_0)| < K|\tau|^\alpha.$$

Montrer que pour $0 < \alpha < 1$ on a

$$|F_n * f(t_0) - f(t_0)| \leq \frac{\pi + 1}{1 - \alpha}Kn^{-\alpha}$$

et pour $\alpha = 1$ on a
$$|F_n * f(t_0) - f(t_0)| \leq 2\pi K \frac{\log n}{n}.$$

Solution de l'exercice 12. Comme dans la preuve du théorème de Lebesgue on utilise l'identité (3.12) du poly et l'estimation (3.14) :

$$(3.12) \quad F_n * f(t_0) - f(t_0) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right) F_n(\tau)\left(\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f(t_0)\right)$$

et l'estimation (3.14) : pour $0 < \tau < \pi$ on a $0 \leq F_n(\tau) \leq \min(n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)\tau^2})$. On prend $\delta = \frac{\pi}{n+1}$ dans (3.10) et on majore F_n par (3.12) différement sur chaque intervalle, ensuite on utilise l'hypothèse lipschitzienne, on calcule les intégrales grâce aux primitives connues et on majore

$$|F_n * f(t_0) - f(t_0)| \leq K\frac{\pi^\alpha}{(n+1)^\alpha}\left(\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\right) \leq K\frac{\pi+1}{(1+n)^\alpha(1-\alpha)}.$$

Pareil pour le cas $\alpha = 1$.

Exercice 13. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ telle que $|\hat{f}(n)| \leq Kn^{-1}$. Montrer que pour tout n et pour tout $t \in \mathbb{T}$ on a
$$|S_n(f)(t)| \leq ||f||_\infty + 2K.$$
En déduire que
$$\left|\sum_{j=1}^n \frac{\sin jt}{j}\right| \leq \frac{\pi}{2} + 1.$$
Indication : considerer $f(t) = \frac{t}{2}$ sur $[0, 2\pi[$.

Solution de l'exercice 13. On écrit $S_n(t) = F_n * f(t) + \sum_{j=-n}^n \frac{|j|}{n}\hat{f}(j)e^{ijt}$. On majore d'une part $|F_n * f(t)| \leq ||f||_\infty ||F_n||_1 = ||f||_\infty$. D'autre part $|\sum_{j=-n}^n \frac{|j|}{n}\hat{f}(j)e^{ijt}| \leq \sum_{j=-n; j\neq 0}^n \frac{K}{n} = 2K$.

Comme indiqué, on considère $f(t) = \frac{t}{2}$ sur $[0, 2\pi[$. On calcule $\hat{f}(j) = \frac{i}{j}$ pour $j \neq 0$ et $\hat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$. On a $||f||_\infty = \pi$ et $K = 1$. Donc $|S_n(f)(t)| = |\pi + \sum_{j=1}^n \frac{2\sin(jt)}{t}| \leq \pi + 2$. On en déduit $|\sum_{j=1}^n \frac{2\sin(jt)}{t}| \leq \pi + 1$, ce qui n'est pas aussi bien que le résultat démandé. On remarque que pour $g(t) = f(t) - \frac{\pi}{2}$ on a $\hat{g}(j) = \hat{f}(j) = \frac{i}{j}$ pour $j \neq 0$ et $\hat{g}(0) = 0$. Comme $||g||_\infty = \frac{\pi}{2}$ on a donc $|S_n(g)(t)| = 2|\sum_{j=1}^n \frac{\sin(jt)}{j}| \leq \frac{\pi}{2} + 2$ et le résultat suit.

Exercice 14. Soit f une fonction absoluement continue sur $\mathbb{T}$ telle que $f' \in L^2(\mathbb{T})$. Montrer que
$$\sum |\hat{f}(n)| \leq ||f||_1 + \left(2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} ||f'||_2.$$

Solution de l'exercice 14. On a $|\hat{f}(0)| \leq ||f||_1$ et par l'identité de Parseval $\sum_n |n\hat{f}(n)|^2 = ||f'||_2^2$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(0)| + \left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq ||f||_1 + \left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} ||f'||_2.$$

Exercice 15.(∗) Soient $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Montrer que la série des coefficients de Fourier de $f * g$ est absoluement convergente (i.e. $f * g$ appartient à l'algèbre de Wiener).

Solution de l'exercice 15. On a $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$. Par l'inégalite de Cauchy-Schwarz et l'identité de Parseval on obtient

$$\sum_n |\widehat{f * g}(n)| = \sum_n |\hat{f}(n)\hat{g}(n)| \leq \left(\sum_n |\hat{f}(n)|^2\right) \left(\sum_n |\hat{g}(n)|^2\right) = ||f||_2^2 ||g||_2^2 < \infty.$$

Exercice 16. Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de nombres complexes. Soient $B_k = \sum_{n=1}^k b_k$ et $B_0 = 0$.

1. Montrer la formule de sommation par parties :

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

2. En déduire le critère de convergence de Dirichlet pour les séries : si la suite $(B_n)_n$ est bornée et la suite $(a_n)_n$ décroît vers 0, alors $\sum_n a_n b_n$ converge.

Solution de l'exercice 16.

1. On a

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = \sum_{n=M}^{N} a_n (B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=M}^{N} a_n B_n - \sum_{n=M-1}^{N-1} a_{n+1} B_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

2. Supposons $|B_n| \leq B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme de plus la suite $(a_n)_n$ est décroissante, $a_{n+1} - a_n \geq 0$ donc en utilisant la question précédente et l'inégalité du triangle :

$$|\sum_{n=M}^{N} a_n b_n| \leq B \left(a_N + a_M + \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n)\right) = 2a_N B \leq 2a_M B.$$

   Ceci implique que la suite $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n$ est de Cauchy, donc convergente.

Exercice 17. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ et soit $l \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$\hat{f}(k) \leq \frac{C}{|k|^{l+1+\epsilon}},$$

pour $C > 0$, $\epsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que $f \in C^l$. *Indication :* On commence par $l = 0$ et ensuite on fait une récurrence sur l. Pour $l = 0$ montrer que $S_N(f)$ converge uniformément et absoluement. En déduire que la limite est continue et qu'elle vaut f p.p.

Solution de l'exercice 17. On a $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(k)e^{ikt}$ et $|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^{1+\epsilon}}$ donc $S_N(f)$ converge absoluement et uniformément. Chaque $S_N(f)$ étant continue comme somme de termes continues, on a donc que la limite de $S_N(f)$ est continue. Notons $g(t) = \lim_{N\to infty} S_N(f)(t)$. La fonction f étant dans L^2, sa série de Fourier converge en L^2 vers f. De plus $||S_N(f) - g||_{L^2} \leq ||S_N(f) - g||_{L^\infty}$ donc $S_N(f)$ converge vers g dans L^2. Par l'unicité de la limite on a $f = g$ dans L^2 donc $f = g$ p.p.

Supposons maintenant que $l = 1$. Par le résultat précédent on a que $S_N(f) \to f$ p.p. et f continue (càd il existe un représentant continue dans la classe d'équivalenece de f). Par IPP on a que $\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k)$ donc d'une part $S_N'(f) = S_N(f')$ et d'autre part $|\widehat{f'}|(k) \leq \frac{c}{k^{1+\epsilon}}$. Si une série de fonctions converge et la série de ses dérivés converge uniformément alors la somme de la série de fonctions est dérivable et sa dérivée est la série de fonctions dérivées. On en déduit que $f \in C^1$.

Par récurrence on obtient que $f \in C^l$.

Exercice 18. $(*)$ On définit, pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $u(r,\theta) = \frac{\partial P_r}{\partial \theta}$, où $P_r(\theta)$ est le noyau de Poisson. On pourra voir cette fonction comme une fonction sur le disque, en posant $\tilde{u}(x,y) = \tilde{u}(r\cos\theta, r\sin\theta) = u(r,\theta)$. Montrer que

1. $\triangle\tilde{u} = 0$ sur le disque (ouvert).
2. $\lim_{r\to 1} u(r,\theta) = 0$ pour tout θ.
3. Montrer que la convergence précédente n'est pas uniforme.
   On pourra regarder $\tilde{u}(1-\epsilon,\epsilon) \to -\infty$ quand $\epsilon \to 0$.

Solution de l'exercice 18.

1. On a $u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|m|}ine^{in\theta}$. Le rayon de convergence de cette série est égal à 1 donc on peut dériver sous le signe somme. Chaque terme vérifie $\triangle r^{|m|}ine^{in\theta} = 0$ donc $\triangle u = 0$. On a utilisé la formule $\triangle = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2$.
2. Si $\theta \neq 0$ alors le dénominateur de $u(r,\theta) = \frac{2r(r^2-1)\sin\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}$ est non-nul, donc on peut passer à la limite et $\lim_{r\to 1} u(r,\theta) = 0$. Si $\theta = 0$, alors $u(r,0) = 0$, donc $\lim_{r\to 1} u(r,\theta) = 0$.
3. On a $\tilde{u}(x,y) = \frac{2y(x^2+y^2-1)}{((1-x)^2+y^2)^2}$ donc $\tilde{u}(1-\epsilon,\epsilon) = \frac{-4\epsilon^2+4\epsilon^3}{4\epsilon^4} \to \infty$ quand $\epsilon \to 0$.

Exercice 19. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$.

1. Montrer que
$$\hat{f}(n) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inx}dx.$$
2. Supposons que f satisfait à une condition de Hölder d'ordre α, pour un $0 < \alpha \leq 1$:
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha,$$
avec $C > 0$ et pour tout x, h. Montrer que $\hat{f}(n) = O(\frac{1}{|n|^\alpha})$.

3. Montrer qu'on ne peut pas améliorer le résultat précédent en considérant
$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\alpha}e^{i2^kx}.$$
On montrera que f satisfait à une condition de Hölder d'ordre α et $\hat{f}(N)=\frac{1}{N^\alpha}$ pour $N=2^k$.

Solution de l'exercice 19.

1. Par calcul direct (changement de variable + 2π périodicité de f et de e^{ix}).
2. De la question précédente on en déduit
$$\hat{f}(n)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})\right)e^{-inx}.$$
En utilisant l'hypothèse on en déduit $|\hat{f}(n)|\leq\frac{c}{|n|^\alpha}$
3. Pour le f indiqué on a $\hat{f}(n)=\frac{1}{n^\alpha}$ si $n=2^k$ et $k\in\mathbb{N}$ (et $\hat{f}(n)=0$ sinon). On veut montrer que f satisfait une condition de Hölder d'orde α. On majore :
$$|f(x+h)-f(x)|\leq\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\alpha}\left|e^{i2^k(x+h)}-e^{i2^kx}\right|\leq\sum_{2^k\leq\frac{1}{|h|}}2^{-k\alpha}2^k|h|+\sum_{2^k>\frac{1}{|h|}}2^{-k\alpha}2.$$
Chaque série se majore par $c|h|^\alpha$: soit $k_0\in\mathbb{N}$ tel que $2^{k_0}\leq\frac{1}{|h|}$ et $2^{k_0+1}>\frac{1}{|h|}$. Ce k_0 existe et est unique. La première somme est une somme géométrique de 0 à k_0, la deuxième est une somme géométrique de k_0+1 à l'infini. On a $2^{(k_0+1)(1-\alpha)}\leq|h|^{1-\alpha}2^{1-\alpha}$ car $1-\alpha>0$ et $2^{(k_0+1)(-\alpha)}\leq\frac{1}{|h|^{-\alpha}}$ car $-\alpha<0$. Le résultat en découle.

Exercice 20. Soit f une fonction 2π périodique, lipschitzienne avec une constante de Lipschitz $K>0$: pour tout x,y
$$|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|.$$
On a $\hat{f}(n)=O(\frac{1}{|n|})$, mais nous allons montrer que la série de Fourier de f est absolument et uniformément convergente.

1. Soit $h>0$. On définit $g_h(x)=f(x+h)-f(x-h)$. Montrer que
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_h(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}4|\sin(nh)|^2|\hat{f}(n)|^2.$$
En déduire que
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\sin(nh)|^2|\hat{f}(n)|^2\leq K^2h^2.$$
2. Soit $h=\frac{\pi}{2^{p+1}}$. Montrer que :
$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p}|\hat{f}(n)|^2\leq\frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

3. Majorer $\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p} |\hat{f}(n)|$ et en déduire que la série de Fourier de f converge absolument, donc uniformément.

Solution de l'exercice 20.

1. On a $\hat{g}_h(n) = (e^{inh} - e^{-inh})\hat{f}(n) = 2i\sin(nh)\hat{f}(n)$. Par l'identité de Parseval on obtient la première égalité. Comme $|g_h(x)| \leq 2K|h|$ on en déduit l'inégalité.
2. Pour $h = \frac{\pi}{2^{p+1}}$ et $2^{p-1} < |n| \leq 2^p$ on a $\frac{\pi}{4} < |n|h \leq \frac{\pi}{2}$ donc $|\sin(nh)|^2 > \frac{1}{2}$. On obtient
$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p} |\hat{f}(n)|^2 \leq 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\sin(nh)|^2|\hat{f}(n)|^2 \leq 2K^2\frac{\pi^2}{2^{2(p+1)}}.$$
3. Par Cauchy-Schwarz, on majore
$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p} |\hat{f}(n)| \leq \left(\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p} |\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p} 1\right)^{\frac{1}{2}} = (2^p - 2^{p-1})^{\frac{1}{2}}\frac{K\pi}{2^{p+\frac{1}{2}}} \leq \frac{K\pi}{\sqrt{2}^p}.$$
La série $\sum_p \frac{K\pi}{\sqrt{2}^p}$ étant convergente pour $p \in \mathbb{N}$ on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\hat{f}(n)|$ est convergente.

Exercice 21.(∗) Soit $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos(\alpha x)$.
2. Montrer les formules suivantes, dues à Euler :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha\tan(\alpha\pi)}.$$
Montrer que pour tout $u \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ on a
$$\cot(u) = \frac{1}{u} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u}{u^2 - n^2\pi^2}.$$
3. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$
$$\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} = 1 + 2\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}.$$

Solution de l'exercice 21.

1. Par calcul direct $\hat{f}(n) = (-1)^{n+1}\frac{\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2-\alpha^2)}$.
2. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $]-\pi, \pi[$ on en déduit la convergence de la série de Fourier vers f en tout point $x \in [-\pi, \pi]$, d'où l'identité
$$\cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(nx)}{n^2 - \alpha^2}.$$
Pour la convergence on a utilisé le Thm de Fejer 3.21 et le thm 3.72. On considère $x = \pi$ et on obtient l'identité annoncé.

3. Il suffit de noter $u = \alpha\pi$ dans l'identité précédente.

Exercice 22. (Phénomène de Gibbs) On considère la fonction 2π périodique définie par

$$g(t) = \begin{cases} \pi - x, & x \in]0, 2\pi[\\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

On note $S_n(g)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{g}(k)e^{ikt}$.

1. Montrer que $|S_n(g)(t)| \leq \pi + 2$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.
2. Montrer que $\frac{\partial}{\partial t}(S_n(g)(t) - g(t)) = D_n(t)$, où $D_n(t)$ est le noyau de Dirichlet.
   On note
   $$S_n(g)(t) - g(t) = \Delta_n(t).$$
3. Montrer que le premier $t > 0$ où Δ_n atteint un maximum local est au point $\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}$.
4. Calculer $\lim_{n\to\infty} \Delta_n\left(\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\right)$.

Solution de l'exercice 22.

1. On calcule $\hat{g}(n) = \frac{1}{in}$ pour $n \neq 0$ et $\hat{g}(0) = 0$. Un exercice précédent permet de conclure, avec $||f||_\infty = \pi$ et $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{|n|}$.
2. Par calcul direct $S_N(g)'(t) = D_N - 1$ et $g'(t) = -1$, d'où le résultat.
3. On a $D_n > 0$ pour $t \in]0, \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}[$ et $D_n < 0$ pour $t \in]\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}, \frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}}[$. Donc Δ_n atteint son premier maximum au point $\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}$.
4. En utilisant $\Delta_n\left(\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\right) - \Delta_n(a) = \int_a^{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} \Delta_n'(s)ds = \int_a^{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} D_n(s)ds$ on passe à la limite a vers 0 et on obtient
   $$\Delta_n\left(\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\right) = S_n(g)(0+) - g(0+) + \int_0^{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} D_n(s)ds = -\pi + \int_0^{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})s)}{\sin(\frac{s}{2})}ds.$$
   On utilise la convexité de la fonction sin pour minorer, pour $s \in]0, \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}[$, $\sin(\frac{s}{2}) \geq \sin(\frac{\pi}{2(n+\frac{1}{2})})\frac{s}{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}}$. On en déduit que
   $$\int_0^{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} D_n(s)ds \leq 2\frac{\frac{\pi}{2(n+\frac{1}{2})}}{\sin(\frac{\pi}{2(n+\frac{1}{2})})}\int_0^\pi \frac{\sin s}{s}ds \to_{n\to\infty} 2\int_0^\pi \frac{\sin s}{s}ds.$$
   D'autre part, en utilisant $\sin(\frac{s}{2}) \leq \frac{s}{2}$ plus un changement de variable on obtient la minoration :
   $$\int_0^{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} D_n(s)ds \geq 2\int_0^\pi \frac{\sin s}{s}ds.$$
   On en déduit que $\lim \int_0^{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} D_n(s)ds = 2\int_0^\pi \frac{\sin s}{s}ds$.
   Autre méthode pour la majoration : montrer que pour $t \in [0, \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}]$ on a $c_n\frac{t}{2} \leq \sin(\frac{t}{2})$, pour $c_n = \cos\left(\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\right)$. On obtient alors
   $$\int_0^{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} D_n(s)ds \leq \frac{2}{c_n}\int_0^\pi \frac{\sin s}{s}ds \to_{n\to\infty} 2\int_0^\pi \frac{\sin s}{s}ds.$$

Exercice 23. Montrer que les constantes de Lebesgue $L_n = ||D_n||_1$ vérifient :

$$L_n = \frac{4}{\pi^2}\log n + O(1).$$

Indication : Montrer que

$$L_n = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}dt + O(1)$$

et

$$\int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}} \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right| dt = \frac{2}{n+\frac{1}{2}}.$$

On pourra utiliser, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2t}{\pi} \leq \sin t \leq t$ et $0 \leq t - \sin t \leq \frac{t^3}{3}$. **Solution de l'exercice 23.** On utilise l'indication pour décomposer

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\right|dt = \int_0^{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\right|dt + \sum_{j=1}^{n-1}\int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{\sin(\frac{t}{2})}dt + \int_{\frac{n\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\right|dt.$$

On traite d'abord le premier et le dernier terme et on montre qu'ils sont de l'ordre $O(1)$. On a pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2t}{\pi} \leq \sin t$, donc $\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\right|dt \leq \pi\int_0^{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\right|dt = \int_0^{\pi}\left|\frac{\sin s}{s}\right|dt$. De même, $\int_{\frac{n\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\right|dt \leq \pi\int_{\frac{n\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\right|dt = \pi\int_{n\pi}^{\pi(n+\frac{1}{2})}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt \leq \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin t}{n\pi+t}\right|dt$. Pour la somme du milieu on a

$$\int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{\frac{t}{2}}dt = \int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|(\frac{t}{2}-\sin(\frac{t}{2}))}{\sin(\frac{t}{2})\frac{t}{2}}dt$$

$$\leq \int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|\frac{t^3}{3}}{\frac{t}{\pi}\frac{t}{2}}dt \leq \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}} tdt = \frac{\pi^3}{3}\frac{2j+1}{(n+\frac{1}{2})^2}.$$

Or $\sum_{j=1}^{n-1}\frac{2j+1}{(n+\frac{1}{2})^2} = O(1)$ donc nous avons montré la première identité qui apparait dans l'indication. On majore

$$\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}dt \leq \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{n+\frac{1}{2}}{j\pi}\int_{\frac{j\pi}{n+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}}|\sin(n+\frac{1}{2})t|dt = \frac{4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} = \frac{4}{\pi^2}\log n + O(1).$$

Exercice 24.(∗) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum_k f(x+2\pi k)$ converge dans $L^1(\mathbb{T})$ vers une fonction qu'on appelle Pf telle que $||Pf||_{L^1(\mathbb{T})} \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R})}$. Montrer que de plus

$$\widehat{Pf}(k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Solution de l'exercice 24. On a

$$||\sum_k f(x+2k\pi)||_{L^1(\mathbb{T})} \leq \int_{\mathbb{T}} \sum_k |f(x+2k\pi)|dx = \sum_k \int_{\mathbb{T}} |f(x+2k\pi)|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx.$$

Pour rendre l'argument rigoureux on considère la norme $L^1(\mathbb{T})$ d'une somme partielle de la série et on majore par la norme $L^1(\mathbb{R})$ de f. On a $\widehat{Pf}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sum_n f(x+2n\pi)e^{-ixk}dx$. La convergence absolue dans $L^1(\mathbb{T})$ nous permet d'intervertir somme et intégrale et on obtient, en faisant un changement de variable, $\widehat{Pf}(k) = \frac{1}{2\pi}\sum_n \int_{\mathbb{T}} f(x+2n\pi)e^{-ixk}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixk}dx$.

Exercice25. $(*)$ (**Formule de sommation de Poisson**) Soit $f \in C(\mathbb{R})$ telle que $|f(x)| \leq C(1+|x|)^{-1-\epsilon}$ et $|\hat{f}(k)| \leq C(1+|k|)^{-1-\epsilon}$ pour $C, \epsilon > 0$. Montrer que

$$\sum_k f(x+2\pi k) = \sum_k \hat{f}(k)e^{ikx}.$$

Solution de l'exercice 25. Les conditions de décroissance de f et de $\hat{f}$ nous garantissent

la convergence absolue et uniforme de chacune de deux séries, et aussi que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Par l'exercice précédent, $x \mapsto Pf(x)$ est une fonction bien définie, et maintenant continue, sur $\mathbb{T}$. Les coefficients de Fourier étant sommable, on sait que Pf coincide presque partout (et donc partout par continuité) avec sa série de Fourier.

Exercice26. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{T})$ (ou $f \in C(\mathbb{T})$ si $p = \infty$) on a

$$||S_n f - f||_p \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

2. On a $\sup_N ||S_N||_{p\to p} < \infty$, où $||S_N||_{p\to p} = \sup_{||f||_p=1} ||S_N f||_p$.

Solution de l'exercice 26.

1. $\implies$ 2. : Soit $\epsilon = 1$ et soit $n \geq N_1$ alors $||S_n f||_p \leq 1 + ||f||_p$. Soit $M = max(||f||_p + 1, ||S_n f||_p, n = 0, 1, \ldots, N_1 - 1)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||S_n f||_p \leq M$. Donc pour tout $f \in L^p$ on a $||S_n f||_p < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de Banach-Steinhaus on obtient $\sup_N ||S_N||_{p\to p} < \infty$.
2. $\implies$ 1. : Soit F_n le noyau de Fejer. Alors

$$||S_n f - f||_p \leq ||S_n(f - F_n * f)||_p + ||S_n(F_n * f) - f||_p.$$

Mais $||S_n(f - F_n * f)||_p \leq ||S_n||_{p\to p}||f - F_n * f||_p$ et $S_n(F_n * f) = F_n * f$, donc

$$||S_n f - f||_p \leq \left(\sup_n ||S_n||_{p\to p} + 1\right) ||f - F_n * f||_p.$$

Or on sait que F_n est une approximation de l'unité, donc $||f - F_n * f||_p \to 0$ quand $n \to \infty$.