TD 7 - Analyse harmonique dans le plan complexe

1 Rappels d'Analyse complexe

Exercice 1.(∗∗)

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = z^k$. Montrer que $\partial_z f(z) = kz^{k-1}$ et $\partial_{\overline{z}} f(z) = 0$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ que l'on identifie à une fonction polynôme sur $\mathbb{C}$, $P(z) = \sum a_n z^n$. Montrer que
$$\int_{\mathbb{T}} P(e^{it})\, dt = P(0) = a_0.$$

Exercice 2.(∗∗) Quelle est la série trigonométrique conjuguée de la série $\sum_{n\geq 0} a_n \cos(nt)$?

Exercice 3.(∗∗) Soit $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur le disque fermé et holomorphe sur D. On note aussi f la restriction de f à $S^1 = \mathbb{T}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \hat{f}(-n) = 0.$$

On pourra introduire la fonction $f_r(z) = f(rz)$ *pour* $r < 1$.

Exercice 4.(∗∗) Soit f une fonction (continue) sur $\mathbb{T}$ vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$ (i.e. un élément de l'algèbre de Wiener). Montrer que f est la valeur au bord d'une fonction holomorphe sur D (continue sur $\overline{D}$) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \hat{f}(-n) = 0.$$

Exercice 5.(∗∗) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{T}$. Montrer que f est la valeur au bord d'une fonction holomorphe sur D (continue sur $\overline{D}$) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \hat{f}(-n) = 0.$$

2 Intégrale de Poisson

Notations : On définit le secteur angulaire Ω_α du point 1 comme la réunion de tous les disques $D(0,\alpha)$ et tous les segments qui joignent $z=1$ aux points de $D(0,\alpha)$.

Exercice 6. $(*)$

1. Rappeler que le noyau de Poisson défini par $P_r : t \in \mathbb{T} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int}$ peut s'écrire :

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$$

et que $P_r(\theta - t)$ est égale à :

$$P(z,e^{it}) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$$

avec $z = re^{i\theta} \in D$ et $e^{it} \in \partial D$.

2. Montrer que pour $\alpha \in]0,1[$ et $z \in \Omega_\alpha$ il existe une constante C_α tel que :

$$C_\alpha P(z,e^{it}) \leq P(|z|,e^{it})$$

Exercice 7.$(**)$

Soit μ une mesure complexe sur $\mathbb{T}$, montrer que la fonction u définie sur D par :

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}} P(z,e^{it})d\mu(e^{it})$$

est harmonique sur $\mathbb{T}$.

Remarque : Dans la suite, on notera $P(d\mu)$ la fonction u.

Exercice 8.

Si $\alpha \in]0,1[$ et $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, on définit sa fonction maximale non-tangentielle N_α et sa fonction maximale radiale M_{rad} par les formules suivantes :

$$N_\alpha u(e^{it}) = \sup\{|u(z)| \ : \ z \in e^{it}\Omega_\alpha\}$$
$$M_{rad}u(e^{it}) = \sup\{|u(re^{it})| \ : \ r \in [0,1]\}$$

On suppose que $u = P(d\mu)$ avec μ une mesure finie, positive et de Borel sur $\mathbb{T}$.

1. Lorsque u est à valeurs réelles, montrer qu'il existe une constante C_α telle que

$$C_\alpha N_\alpha u(e^{it}) \leq M_{rad}u(e^{i\theta})$$

2. Montrer que :

$$M_{rad}u(e^{it}) \leq M\mu(e^{it})$$

Exercice 9.($*$)

Soit μ une mesure de Borel positive sur $\mathbb{T}$ telle que $D\mu(e^{i\theta}) = 0$ pour un θ. Montrer que l'intégrale de Poisson de μ, noté $P[d\mu]$ admet comme limite non tangentielle zéro en $e^{i\theta}$.

Remarque : On dit qu'une fonction u sur $\mathbb{D}$ admet une limite non tangentielle en un point $e^{i\theta}$ si la limite suivante existe pour un certain $\alpha > 0$:

$$\lim_{z \to e^{i\theta},\ z \in e^{i\theta}\Omega_\alpha} u(z)$$

Exercice 10.($*$) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $e^{i\theta}$ un point de Lebesgue de f. Montrer que $P[f]$ admet pour limite $f(e^{i\theta})$ pour limite non tangentielle en $e^{i\theta}$.

Exercice 11. Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < \infty$. Montrer que

$$\lim_{r \to 1} ||P[f](re^{it}) - P[f](e^{it})||_p = 0.$$

3 Fonctions conjuguées

Exercice 12.($*$) Soient $f \in L^p(\mathbb{T})$ et $g \in L^q(\mathbb{T})$ avec $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que la série suivante converge

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{f}}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

Rappels (Valeur principale de l'argument et du logarithme)
Introduisons l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- = \{z \in \mathbb{C}\,;\mathrm{Re}(z) \notin]-\infty, 0]\}$. *Il existe une fonction continue* $\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \to]-\pi, \pi[$ *telle que* $z = |z|e^{i\mathrm{Arg(z)}}$. *En fait, sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ *on peut définir le logarithme complexe (fonction inverse de l'exponentielle), qui vérifie*

$$\log(z) = \log(|z|) + i\mathrm{Arg(z)}.$$

La fonction $\log$ *est holomorphe sur* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^-$ *et ainsi la fonction* Arg *est harmonique (c'est le conjugué harmonique de* $\log(|z|)$ *sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$*). La fonction* Arg *(et aussi* $\log$, *donc) est discontinue le long de* $\mathbb{R}^-$ *; par exemple, si on se restreint au cercle, on a que* $\mathrm{Arg}(e^{it}) \to \pi$ *lorsque* $t \to \pi^+$ *alors que* $\mathrm{Arg}(e^{it}) \to -\pi$ *lorsque* $t \to \pi^-$.

Exercice 13.($*$) On note $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Le but de cet exercice est de montrer que la fonction $\log(|z|)$ est une fonction harmonique sans conjuguée harmonique sur $\mathbb{C}^*$.

On note $u(z) = u(x, y) = \log(|z|) = \log(\sqrt{|x|^2 + |y|^2})$ pour $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$.

1. Montrer que la fonction u est harmonique sur $\mathbb{C}^*$ à valeurs réelles.
2. On suppose qu'il existe une fonction harmonique $v : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ harmonique telle que $f(z) = u(z) + iv(z)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

(a) En utilisant le logarithme, montrer qu'il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \qquad \mathrm{Arg(z) = v(z) + a.}$$

(b) Conclure

Exercice 14.($*$) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ une fonction à valeurs réelles. On suppose que la série de Fourier conjuguée de celle de f est la série de Fourier d'une fonction intégrable g. Montrer qu'alors $g = \tilde{f}$ presque partout.

4 Fonctions harmoniques

Exercice 15.($**$) Soit V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u : \overline{V} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, harmonique sur V (i.e. admettant des dérivées secondes avec $\Delta u = 0$ sur V).

Montrer que

$$\max_{\overline{V}} u = \max_{\partial V} u.$$

Remarque : en travaillant un peu plus on peut montrer que si V est connexe et s'il existe $x_0 \in V$ tel que $u(x_0) = \max_{\overline{V}} u$ alors u est constante égale à $u(x_0)$.

Exercice 16.

Montrer que toute fonction harmonique et bornée sur $\mathbb{R}^2$ est constante.

Exercice 17. Montrer que les translations et les homothéties préservent les fonctions harmoniques. Montrer qu'une rotation préserve les fonctions harmoniques.

Exercice18. Montrer qu'une fonction harmonique sur $B(0, R)$ radiale est constante ($n > 1$).

Exercice19. Montrer qu'une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n$, bornée est constante. Donner des exemples de fonctions harmoniques sur le complémentaire d'un compact qui sont bornées.