TD 7 - Analyse harmonique dans le plan complexe

1 Rappels d'Analyse complexe

Exercice 1.(∗∗)

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = z^k$. Montrer que $\partial_z f(z) = kz^{k-1}$ et $\partial_{\overline{z}} f(z) = 0$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ que l'on identifie à une fonction polynôme sur $\mathbb{C}$, $P(z) = \sum a_n z^n$. Montrer que
$$\int_{\mathbb{T}} P(e^{it})\, dt = P(0) = a_0.$$

Solution de l'exercice 1. 1) Tout d'abord, il convient de dire que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, puisque c'est une fonction polynôme de x, y. On remarque que, par définition, les dérivées ∂_z et $\partial_{\overline{z}}$ vérifient, pour une fonction g de classe C^1, $\partial_z g^k = kg^{k-1}\partial_z g$ et $\partial_{\overline{z}} g^k = kg^{k-1}\partial_{\overline{z}} g$. Ainsi, il suffit de vérifier que $\partial_z(z) = 1$ et $\partial_{\overline{z}}(z) = 0$, ce qui se voit en revenant à la définition. On aurait pu bien sûr utiliser la formule du binôme pour développer $(x + iy)^k$.

2) On peut invoquer le fait que P est holomorphe (et donc harmonique), mais ici on préférera le calcul direct, puisque la restriction de P au cercle $S^1 \simeq \mathbb{T}$ est le polynôme trigonométrique $f(t) = \sum a_n e^{int}$, dont l'intégrale est a_0.

Exercice 2.(∗∗) Quelle est la série trigonométrique conjuguée de la série $\sum_{n\geq 0} a_n \cos(nt)$?

Solution de l'exercice 2. C'est ici l'occasion de rappeler que les séries trigonométriques s'entendent comme les sommes partielles symétriques. Ainsi, on identifie la série $\sum_{n\geq 0} a_n \cos(nt)$ à la série
$$a_0 + \frac{1}{2}\sum_{\mathbb{Z}^*} a_{|n|}e^{int}$$
dont la série conjuguée $\frac{1}{2}\sum_{\mathbb{Z}}(-i\,\mathrm{signe}(n)a_{|n|})e^{int}$, qui s'identifie à
$$\sum_{n\geq 1} a_n \sin(nt).$$

Exercice 3.(∗∗) Soit $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur le disque fermé et holomorphe sur D. On note aussi f la restriction de f à $S^1 = \mathbb{T}$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \hat{f}(-n) = 0.$$

On pourra introduire la fonction $f_r(z) = f(rz)$ pour $r < 1$.

Solution de l'exercice 3. Si f était holomorphe au voisinage du disque, on pourrait conclure directement à l'aide de la formule de Cauchy. On contourne la difficulté en introduisant $f_r(z) = f(rz)$ qui est ainsi holomoprhe sur le disque ouvert $\frac{1}{r}D \supset \overline{D}$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction

$$z \to f(z)z^n$$

est encore une fonction holomorphe sur $\frac{1}{r}D$, valant zéro en zéro, et la formule de Cauchy donne donc

$$0 = \int_{\mathbb{T}} f(re^{it})e^{int}\,dt.$$

La continuité (uniforme) de f sur $\overline{D}$ permet de dire que la famille de fonctions $t \to f(re^{it})$ converge uniformément sur $\mathbb{T}$ vers la fonction $t \to f(e^{it})$ lorsque $r \to 1-$, d'où l'on tire immédiatement que

$$\int_{\mathbb{T}} f(re^{it})e^{int}\,d \to \int f(e^{it})e^{int}\,dt$$

et le résultat voulu.

Exercice 4.(∗∗) Soit f une fonction (continue) sur $\mathbb{T}$ vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$ (i.e. un élément de l'algèbre de Wiener). Montrer que f est la valeur au bord d'une fonction holomorphe sur D (continue sur $\overline{D}$) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \hat{f}(-n) = 0.$$

Solution de l'exercice 4. On a déjà vu le caractère nécessaire de la condition à l'exercice précédent. Montrons que la condition garantit que f est la valeurs au bord d'une fonction holomoprhe.

On devine ici comment construire la fonction holomorphe. En effet, par sommabilité (convergence normale) la fonction

$$F(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{f}(n)z^n$$

est bien définie et continue sur $\overline{D}$. Sa restriction à $S^1 = \mathbb{T}$ a les mêmes coefficients de Fourier que f, donc coincide presque partout, donc partout, avec f.

Exercice 5.(∗∗) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{T}$. Montrer que f est la valeur au bord d'une fonction holomorphe sur D (continue sur $\overline{D}$) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \hat{f}(-n) = 0.$$

Solution de l'exercice 5. On a déjà vu le caractère nécessaire de la condition à l'exercice précédent. Montrons que la condition garantit que f est la valeurs au bord d'une fonction holomorphe. Par rapport à l'exercice précédent, on ne suppose plus la sommabilité des coefficient de Fourier. On peut toujours définir la fonction F comme précédemment, mais ce sont les valeurs au bord qui posent problème.

Par le cours, on sait que f coincide avec son extension de Poisson $P[f]$. Il suffit donc de montrer que $P[f]$ est holomorphe sur D. En fait, c'est aussi nécessaire, puisqu'une fonction holomorphe est harmonique et que $P[f]$ est l'unique extension harmonique.

Ecrivons ce que vaut $P[f]$ sous notre hypothèse

$$P[f](re^{it}) = P_r * f(e^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{N}} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{int},$$

et donc

$$P[f](z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{f}(n)\, z^n.$$

Cette fonction est bien holomorphe sur D. On a pas convergence normale de la série sur D, mais comme les coefficients de Fourier sont bornés, donc cette série entière à un rayon de convergence ≥ 1 (attention, on ne dit pas que...).

2 Intégrale de Poisson

Notations : On définit le secteur angulaire Ω_α du point 1 comme la réunion de tous les disques $D(0,\alpha)$ et tous les segments qui joignent $z = 1$ aux points de $D(0,\alpha)$.

Exercice 6. $(*)$

1. Rappeler que le noyau de Poisson défini par $P_r : t \in \mathbb{T} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int}$ peut s'écrire :

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$$

   et que $P_r(\theta - t)$ est égale à :

$$P(z, e^{it}) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$$

   avec $z = re^{i\theta} \in D$ et $e^{it} \in \partial D$.

2. Montrer que pour $\alpha \in]0,1[$ et $z \in \Omega_\alpha$ il existe une constante C_α tel que :

$$C_\alpha P(z, e^{it}) \leq P(|z|, e^{it})$$

Exercice 7.$(**)$

Soit μ une mesure complexe sur $\mathbb{T}$, montrer que la fonction u définie sur D par :

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}} P(z, e^{it})d\mu(e^{it})$$

est harmonique sur $\mathbb{T}$.

Remarque : Dans la suite, on notera $P(d\mu)$ la fonction u.

Exercice 8.

Si $\alpha \in]0,1[$ et $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, on définit sa fonction maximale non-tangentielle N_α et sa fonction maximale radiale M_{rad} par les formules suivantes :

$$N_\alpha u(e^{it}) = \sup\{|u(z)| \ : \ z \in e^{it}\Omega_\alpha\}$$
$$M_{rad} u(e^{it}) = \sup\{|u(re^{it})| \ : \ r \in [0,1]\}$$

On suppose que $u = P(d\mu)$ avec μ une mesure finie, positive et de Borel sur $\mathbb{T}$.

1. Lorsque u est à valeurs réelles, montrer qu'il existe une constante C_α telle que

$$C_\alpha N_\alpha u(e^{it}) \leq M_{rad} u(e^{i\theta})$$

2. Montrer que :

$$M_{rad} u(e^{it}) \leq M\mu(e^{it})$$

Exercice 9.$(*)$

Soit μ une mesure de Borel positive sur $\mathbb{T}$ telle que $D\mu(e^{i\theta}) = 0$ pour un θ. Montrer que l'intégrale de Poisson de μ, noté $P[d\mu]$ admet comme limite non tangentielle zéro en $e^{i\theta}$.

Remarque : On dit qu'une fonction u sur $\mathbb{D}$ admet une limite non tangentielle en un point $e^{i\theta}$ si la limite suivante existe pour un certain $\alpha > 0$:

$$\lim_{z \to e^{i\theta}, \ z \in e^{i\theta}\Omega_\alpha} u(z)$$

Exercice 10.$(*)$ Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $e^{i\theta}$ un point de Lebesgue de f. Montrer que $P[f]$ admet pour limite $f(e^{i\theta})$ pour limite non tangentielle en $e^{i\theta}$.

Exercice 11. Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < \infty$. Montrer que

$$\lim_{r \to 1} ||P[f](re^{it}) - P[f](e^{it})||_p = 0.$$

Solution de l'exercice 11. On sait que $T : f \mapsto P[f]$ est borné sur $L^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < \infty$

donc

$$||\tilde{f}(re^{it}) - \tilde{f}(e^{it})||_p \leq C||f(re^{it}) - f(e^{it})||_p \leq ||P_r * f - f||_p.$$

Or P_r est une approximation de l'unité et L^p est un espace de Banach homogène, donc $P_r * f \to f$ dans L^p quand $r \to 1$.

3 Fonctions conjuguées

Exercice 12.$(*)$ Soient $f \in L^p(\mathbb{T})$ et $g \in L^q(\mathbb{T})$ avec $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que la série suivante converge

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{f}}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

Solution de l'exercice 12. Soit $N \in \mathbb{N}$. Par un calcul direct

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{\tilde{f}}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(t)\overline{S_N(g)(t)}dt.$$

Il suffit donc de montrer que le terme de droite converge quand N tend vers infini. Or

$$\left|\int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(t)\overline{S_n(g)(t)}dt - \int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(t)\overline{g(t)}dt\right| \leq ||\tilde{f}||_p||S_ng - g||_q \leq C||f||_p||S_ng - g||_q.$$

Pour $1 < p < \infty$ on a $1 < q < \infty$ donc $||S_ng - g||_q \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc $\lim \int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(t)\overline{S_N(g)(t)}dt$ existe et par conséquence $\sum_{n=-N}^{N} \hat{\tilde{f}}(n)\overline{\hat{g}(n)}$ existe.

Rappels (Valeur principale de l'argument et du logarithme)
Introduisons l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- = \{z \in \mathbb{C}\, ; \mathrm{Re}(z) \notin] - \infty, 0]\}$. *Il existe une fonction continue* $\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \to] - \pi, \pi[$ *telle que* $z = |z|e^{i\mathrm{Arg(z)}}$. *En fait, sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ *on peut définir le logarithme complexe (fonction inverse de l'exponentielle), qui vérifie*

$$\log(z) = \log(|z|) + i\mathrm{Arg(z)}.$$

La fonction $\log$ *est holomorphe sur* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^-$ *et ainsi la fonction* Arg *est harmonique (c'est le conjugué harmonique de* $\log(|z|)$ *sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$*). La fonction* Arg *(et aussi* $\log$*, donc) est discontinue le long de* $\mathbb{R}^-$ *; par exemple, si on se restreint au cercle, on a que* $\mathrm{Arg}(e^{it}) \to \pi$ *lorsque* $t \to \pi^+$ *alors que* $\mathrm{Arg}(e^{it}) \to -\pi$ *lorsque* $t \to \pi^-$.

Exercice13.$(*)$ On note $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Le but de cet exercice est de montrer que la fonction $\log(|z|)$ est une fonction harmonique sans conjuguée harmonique sur $\mathbb{C}^*$.

On note $u(z) = u(x, y) = \log(|z|) = \log(\sqrt{|x|^2 + |y|^2})$ pour $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$.

1. Montrer que la fonction u est harmonique sur $\mathbb{C}^*$ à valeurs réelles.
2. On suppose qu'il existe une fonction harmonique $v : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ harmonique telle que $f(z) = u(z) + iv(z)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.
   (a) En utilisant le logarithme, montrer qu'il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \qquad \mathrm{Arg(z) = v(z) + a.}$$
   (b) Conclure

Solution de l'exercice 13.
1) Calcul.
2) Par définition, on a $z \to f(z) - \log(z)$ est une fonction holomorphe à valeurs dans $i\mathbb{R}$, puisque sa partie réelle est nulle. Les équations de Cauchy-Riemann entrainent alors que sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ cette fonction est constante. Or $f(z) - \log(z) = i(v(z) - \mathrm{Arg(z)})$, d'où le résultat. Mais la fonction v étant harmonique sur $\mathbb{C}^*$, elle y est continue, et ainsi sa restriction au cercle est aussi continue. Cela est impossible, vu la discontinuité de Arg.

Exercice 14.$(*)$ Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ une fonction à valeurs réelles. On suppose que la série de Fourier conjuguée de celle de f est la série de Fourier d'une fonction intégrable g. Montrer qu'alors $g = \tilde{f}$ presque partout.

Solution de l'exercice 14. Cela découle d'une remarque vue en cours sur le conjugué harmonique. On suppose donc qu'il existe une fonction intégrable g telle que $\hat{g}(n) = -i\text{sign}(n)\hat{f}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{R}$. Si on note Q le noyau de Poisson conjugué, alors on a par définition

$$Q[f] = P[g]$$

ce qui assure en particulier que $P[g]$ est à valeurs réelle (et au passage, g est aussi à valeurs réelles). Ainsi, on a que

$$P[f] + iP[g]$$

est holomorphe sur D et que $P[g]$ est le conjugué harmonique $P[f]$ sur D. On conclut en invoquant que $P[g]$ converge radialement vers g presque partout.

4 Fonctions harmoniques

Exercice 15.(∗∗) Soit V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u : \overline{V} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, harmonique sur V (i.e. admettant des dérivées secondes avec $\Delta u = 0$ sur V).

Montrer que

$$\max_{\overline{V}} u = \max_{\partial V} u.$$

Remarque : en travaillant un peu plus on peut montrer que si V est connexe et s'il existe $x_0 \in V$ tel que $u(x_0) = \max_{\overline{V}} u$ alors u est constante égale à $u(x_0)$.

Solution de l'exercice 15. Soit $\varepsilon > 0$ et $v(x) := u(x) + \varepsilon|x|^2/2$. Alors cette fonction continue sur $\overline{V}$ ne peut pas atteindre sont max sur $\overline{V}$ en un point de V. En effet, si elle atteignait son max en $x_0 \in V$, on aurait $\nabla v(x_0) = 0$ et les dérivées secondes $\partial^2_{ii} v(x_0)$ toutes négatives, soit $\Delta v(x_0) \leq 0$; mais cela voudrait dire $\Delta u(x_0) + \varepsilon \leq 0$, ce qui est impossible. Ainsi, pour $x \in V$ fixé on a

$$u(x) + \varepsilon u(x) \leq \max_{\partial V}(u + \varepsilon| \cdot |^2|/2).$$

Si on note $M := \max\{|z|^2 \; ; \; z \in \partial V\}$ on a donc

$$u(x) + \varepsilon u(x) \leq \max_{\partial V} u \; + \; \varepsilon M.$$

On conclut en faisant $\varepsilon \to 0$.

Supposons de plus que Noton $M = \max_{\overline{V}} u < \infty$ et soit $E = \{x \in V \; ; \; u(x) = M\}$. On va montrer que E est un ouvert et un fermé de V, et donc qu'il est vide ou égale à V.

Il est fermé par définition (puisque u est continue). Il faut donc montrer qu'il est ouvert. Soit $x_0 \in E$ et $B = \{x \in \mathbb{R}^n \; \|x - x_0\| \leq r\} \subset V$ une boule fermée restant dans V, avec $r > 0$. Alors x_0 est un point de l'intérieur de B sur lequel u atteint sont max sur B. Cela implique que les $\nabla u(x_0) = 0$ et que ses dérivées secondes $\partial^2_{ii} u(x_0)$ sont positives, et donc $\Delta u(x_0) \geq 0$.

Exercice 16.

Montrer que toute fonction harmonique et bornée sur $\mathbb{R}^2$ est constante.

Exercice 17. Montrer que les translations et les homothéties préservent les fonctions harmoniques. Montrer qu'une rotation préserve les fonctions harmoniques.

Solution de l'exercice 17. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Par calcul direct on montre que $\triangle(f(x - x_0)) = (\triangle f)(x - x_0) = 0$ donc $x \mapsto f(x - x_0)$ est harmonique.

Soit $\lambda > 0$. Par calcul direct on montre que $\triangle(f(\lambda x)) = \lambda^2(\triangle f)(\lambda x) = 0$ donc $x \mapsto f(\lambda x)$ est harmonique.

Soit $O \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice orthonormée. Alors $OO^t = O^tO = I$, donc si on note $O = (a_{i,j})_{i,j}$ alors $\sum_j a_{k,j}a_{l,j} = \delta_{k,l}$. Par calcul direct on montre que

$$\triangle(f(Ox)) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}a_{l,j})(\partial_j\partial_k f)(Ox) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{l,k}(\partial_j\partial_k f)(Ox) = (\triangle f)(Ox) = 0$$

donc $x \mapsto f(Ox)$ est harmonique.

Exercice18. Montrer qu'une fonction harmonique sur $B(0, R)$ radiale est constante ($n > 1$).

Solution de l'exercice 18. Par le principe du maximum on a que le minimum et le maximum de f se trouve sur le bord, donc pour tout $x \in B$:

$$\inf_{y\in\partial B} f(y) \leq f(x) \leq \sup_{y\in\partial B} f(y).$$

Mais la fonction étant radiale, elle est constante sur ∂B, donc pour tout $x \in B$, $f(x) = f(y)$, où $y \in \partial B$ quelconque.

Exercice19. Montrer qu'une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n$, bornée est constante. Donner des exemples de fonctions harmoniques sur le complémentaire d'un compact qui sont bornées.

Solution de l'exercice 19. On a la propriété suivante : $|\nabla f(x_0)| \leq \frac{c}{r}||f||_\infty$ pour tout $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \Omega$. Ici $\Omega = R^n$ donc on fait tendre $r \to \infty$ et on obtient $\nabla f(x) = 0$ pour tout $x \in R^n$. On en déduit f constante. Pour montrer lq propriété citée on utilise le principe de la moyenne,

$$\partial_j f(x) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \partial_j f(y)dy = \frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|r^n}\int_{\partial B(x,r)} f(x)\nu_j(x)d\sigma(x)$$

donc en majorant f par $||f||_\infty$ on obtient $|\partial_j f(x)| \leq \frac{n}{r}||f||_\infty$.

On a l'exemple de $f(x) = ||x||^{2-n}$ pour $n \geq 3$. C'est une fonction harmonique sur $\complement B(0, 1)$ et bornée.