# Chapitre 0

# Rappels d'intégration et de topologie

## 0.1 Généralités sur la théorie de Lebesgue de l'intégration

On rappelle que $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ est une *$\sigma$-algèbre* (ou une *tribu*) sur $X$ si

1. $X \in \mathcal{S}$ ;
2. $V \in \mathcal{S} \Longrightarrow X \setminus V \in \mathcal{S}$ ;
3. si $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $E_i \in \mathcal{S}$, alors $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \mathcal{S}$.

On dit alors que $(X, \mathcal{S})$ est un *espace mesurable.* Une mesure (positive) sur $(X, \mathcal{S})$ est une application $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ avec $\mu(\emptyset) = 0$ et qui est $\sigma$-additive.

À partir du moment où l'on connait $\mu(A)$ pour les parties mesurables $A \subset \mathcal{S}$, on peut définir l'intégrale. D'abord on pose $\int 1_A \, d\mu = \mu(A)$. Ensuite, on étend cette définition aux fonctions étagées mesurables positives, par linéarité, après avoir montré que cette intégrale ne dépend pas de l'expression choisie pour la fonction étagée. Puis on étend aux fonctions mesurables positives quelconques, en posant

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int s \, d\mu \ ; \ s \text{ étagée positive mesurable } \ \leq g \right\} ;$$

on utilise à profit qu'une fonction positive mesurable est limite croissante de fonctions étagées (lemme d'approximation). On établit le théorème de convergence monotone, très utile ; il permet par exemple d'intervertir intégrales et séries de fonctions positives (voir ci-dessous). Notons que pour une fonction positive mesurable on a $\int f \, d\mu \in [0, +\infty]$ ; dans le cas où $\int f \, d\mu < \infty$, c'est-à-dire $\int f \, d\mu \neq \infty$ ou encore $\int f \, d\mu \in \mathbb{R}^+$, on dit que notre fonction positive $f$ est *intégrable.*

Ainsi, on sait intégrer toutes les fonctions positives mesurables $f$. On ne peut cependant pas étendre la définition de l'intégrale à une fonction réelle ou complexe mesurable $f : X \to \mathbb{C}$ quelconque. Dans le cas où elle est $\mu$-intégrable, c'est-à-dire où la fonction positive $|f|$ est intégrable (i.e. $\int |f| \, d\mu < \infty$), alors on peut définir l'intégrale. En effet, dans ce cas les parties positives et négatives de $f$ à valeurs réelles sont aussi intégrables, et on peut donc poser $\int f \, d\mu := \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu$. Pour une fonction à valeurs complexe, avec l'hypothèse que $\int |f| \, d\mu < +\infty$, on peut encore définir $\int f \, d\mu := \int \Re(f) \, d\mu + i \int \Im(f) \, d\mu$ car les parties réelles et complexes sont encore intégrables. Enfin, dans le cas intégrable, on établit le théorème de convergence dominée.

Pour résumer : quand est-ce que l'expression $\int f \, d\mu$ a un sens ? Vous devez vous poser systématiquement cette question, et y répondre, avant de pouvoir écrire cette expression. Il y a deux cas où l'on peut écrire $\int f \, d\mu$, qu'il vous faut donc identifier :

— Soit la fonction $f$ est à valeurs réelles positives, et on peut toujours écrire $\int f \, d\mu$, qui peut éventuellement être égal à $+\infty$.

— Soit la fonction mesurable positive $|f|$ a une intégrale finie, $\int |f|\, d\mu < +\infty$, c'est-à-dire $f$ est $(X,\mu)$-intégrable. Dans ce cas, $\int f\, d\mu$ est un nombre fini, appartenant à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Avant de pouvoir écrire $\int f\, d\mu$, il faut justifier que l'on se trouve dans l'une des deux situations ci-dessus. De même, il est inexact de dire que l'intégrale est linéaire. Elle ne l'est pas en général, mais elle le devient si on est dans un des cas ci-dessus (dans le premier cas, on ne peut faire que des combinaisons positives de fonctions positives, bien sûr).

**Remarque 0.1.** *Étant donnée une fonction réelle mesurable $f : X \to \mathbb{R}$, il y a un troisième cas un peu plus général qui permet de définir $\int f\, d\mu$, c'est quand l'une des deux intégrales de fonctions positives $\int f_+\, d\mu$ ou $\int f_-\, d\mu$ est finie (dans la discussion précédente, on demandait que les deux soient finies, car cela équivaut à $\int |f|\, d\mu$ finie). Dans ce cas, on dit que $f$ est semi-intégrable, et on peut encore poser $\int f\, d\mu = \int f_+\, d\mu - \int f_-\, d\mu$ qui appartient à $[-\infty, +\infty]$.*

On retrouve tout le temps, en théorie de l'intégration, cette dichotomie $f$ positive ou/et intégrable. Par exemple, si on travaille avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$ et avec une fonction borélienne $f$ qui est localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (c'est-à-dire $\int_{[a,b]} |f| < +\infty$ pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$) on a .

— Soit la fonction $f$ est à valeurs réelles positives, et alors $\int_{[0,M]} f \to \int_{\mathbb{R}^+} f$ *par convergence monotone.*

— Soit $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et alors $\int_{[0,M]} f \to \int_{\mathbb{R}^+} f$ *par convergence dominée.*

Voici une autre illustration. Soit $(u_n)$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Si les $u_n$ sont des fonctions positives, alors, par convergence monotone,

$$\int \Big(\sum_n u_n\Big)\, d\mu = \sum_n \int u_n\, d\mu.$$

Lorsque les $u_n$ sont à valeurs réelles ou complexes, SI $\int \Big(\sum_n |u_n|\Big)\, d\mu < \infty$, ALORS la série $\sum u_n$ est convergente $\mu$-presque partout, de somme $\mu$-intégrable, les $u_n$ sont aussi $\mu$-intégrables, la série $\sum \int u_n\, d\mu$ est aussi convergente, et on a

$$\int \Big(\sum_n u_n\Big)\, d\mu = \sum_n \int u_n\, d\mu.$$

Vous noterez toutes les précautions nécessaires prises avant d'écrire l'égalité ; ces propriétés découlent du cas positif précédent appliqué aux $|u_n|$, et du fait qu'absolument convergent implique convergent. On retrouvera un raisonnement identique un peu plus bas avec le théorème de Fubini (qui contient le cas des séries ci-dessus, du moins lorsque $\mu$ est $\sigma$-finie).

Les **propriétés fondamentales suivantes** pour un espace mesuré $(X, \mathcal{S}, \mu)$ seront souvent utilisées dans ce cours, sous diverses formes.

**Remarque 0.2** (Valeurs de l'intégrale, valeurs de la fonction)**.** *Si $f, g$ sont deux fonctions mesurables à valeurs réelles telle que $f \geq g$ $\mu$-presque partout, alors $\int f\, d\mu \geq \int g\, d\mu$. Si $f$ est une fonction mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$ et $A, B$ deux parties mesurables telles que $A \subset B$, alors $\int_A f\, d\mu \leq \int_B f\, d\mu$. Cette propriété est peut être mise en défaut si $f$ est à valeurs réelles, et n'a* a priori *aucun sens si $f$ est à valeurs complexe.*

*Dans l'autre sens, on peut dire des choses sur les valeurs de la fonctions à partir de l'intégrale. Si $f$ est $\mu$-presque partout positive ($f(x) \in [0, +\infty]$ pour $\mu$-presque tout $x$) et si $\int f\, d\mu = 0$, alors $f$ est nulle $\mu$-presque partout, soit encore $\mu(\{f > 0\}) = 0$. Cette propriété est un des grands accomplissements de l'intégrale de Lebesgue. L'hypothèse que $f$ est à valeurs positives est bien sûr cruciale ! Pour établir cette propriété, on peut par exemple considérer la suite croissante de parties mesurables $\{f \leq -\frac{1}{n}\}$, qui sont de mesures nulles, et dont la réunion est $\{f < 0\}$.*

*Variante : Pour $A$ un ensemble mesurable et $f$ une fonction mesurable on a :*

$$\Big(\forall x \in A,\ f(x) > 0,\ \text{et } \mu(A) \neq 0\Big) \Longrightarrow \int_A f\, d\mu > 0.$$

*Exemple d'application : si $f$ est une fonction $\mu$-intégrable (à valeurs complexes) telle que pour toute partie mesurable $E$ on a $\int_E f\, d\mu \in \mathbb{R}^+$, alors $f(x) \in \mathbb{R}^+$ pour $\mu$-presque tout $x$. OK ?*

Lorsqu'on souhaite faire des inégalités sur les intégrales, on se ramène presque toujours au cas de fonction positives à l'aide de l'inégalité triangulaire.

**Proposition 0.3.** *Soit $(X, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction $\mu$-intégrable. On a alors*

$$\Big| \int f\, d\mu \Big| \leq \int |f|\, d\mu,$$

*avec égalité si et seulement si il existe $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha_0| = 1$ tel que $f = \alpha_0\, |f|$ $\mu$-presque-partout.*

Dans le cas d'une fonction réelle, il y a donc égalité si et seulement si $f$ est presque-partout positive, ou bien presque-partout négative.

*Démonstration.* Il y a plusieurs preuves possibles. On peut raisonner par dualité comme suit. Pour $w \in \mathbb{C}^n$, on a

$$|w| = \max\{\Re(wz)\ ;\ z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}.$$

Ainsi, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$\Big| \int f\, d\mu \Big| = \Re\Big[\Big(\int f(x)\, d\mu(x)\Big) z_0\Big] = \int \Re(f(x) z_0)\, d\mu(x),$$

où l'on a utilisé la linéarité de l'intégrale. En réutilisant la formule ci-dessous (cette fois juste l'inégalité), on conclut en écrivant que $\Re(f(x) z_0) \leq |f(x)|$.

En ce qui concerne la caractérisation des cas d'égalité, on va traiter le cas d'une fonction à valeurs réelles ; (faites le cas complexe à titre d'exercice). Soit $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mu$-intégrable telle que $\Big| \int f\, d\mu \Big| = \int |f|\, d\mu$. Quitte à changer $f$ en $-f$, on peut supposer que $\int f\, d\mu \geq 0$, ce qui implique que

$$\int \big(|f| - f\big)\, d\mu = 0.$$

Or la fonction $|f| - f$ est positive, et donc elle doit être nulle $\mu$-presque-partout.

$\square$

**Remarque 0.4** (Valeur $+\infty$)**.** *En théorie de l'intégration, on autorise les fonction à prendre la valeur $+\infty$. Mais on peut toujours se ramener au cas où les fonctions ne prennent que des valeurs finies. En effet, si $f$ est une fonction mesurable de $X$ dans $[0, +\infty]$ alors soit $\int f\, d\mu = +\infty$, et alors il n'y a en général plus rien à dire, ou bien $\int f\, d\mu < +\infty$, et dans ce cas,*

$$\mu(\{f = +\infty\}) = 0.$$

*Ainsi, lorsque $\int f\, d\mu < +\infty$, alors pour toute fonction intégrable $H$ positive ou intégrable (et en particulier pour $H = f$) on a*

$$\int_X H\, d\mu = \int_{\{f < +\infty\}} H\, d\mu.$$

*Cela découle de propriétés des ensembles de mesure nulle.*

**Remarque 0.5** (Ensembles de mesure nulle). *Si $A$ est une partie mesurable de mesure nulle, i.e. $\mu(A) = 0$, alors si $f$ est une fonction positive ou intégrable, on a*

$$\int_A f \, d\mu = 0.$$

*Cela est vrai même si $f$ prend la valeur $+\infty$. On pourrait dire que ça découle de la convention $0 \cdot +\infty = 0$, ou mieux, de la convergence monotone ou dominée.*

**Remarque 0.6.** *En théorie de l'intégration, on manipule souvent, pour $g : X \to \mathbb{R}$ des ensembles du type*

$$\{g \in B\} := \{x \in X \; ; \; g(x) \in B\} = g^{-1}(B)$$

*associé à un ensemble $B \subset \mathbb{R}$, typiquement un borélien et souvent un intervalle, comme*

$$\{g \geq a\} = \{x \in X \; ; \; g(x) \geq a\} = g^{-1}([a, +\infty[).$$

Passons à quelques remarques sur le théorème de Fubini. Étant donné deux espaces mesurables $(E, \mathcal{E})$ et $(E', \mathcal{E}')$, on définit sur $E \times E'$ la tribu engendrée par les ensembles de la forme $A \times A'$, $A \in \mathcal{E}$, $A' \in \mathcal{E}'$. On l'appelle la tribu produit et on la note $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$. On rappelle qu'il est extrêmement difficile, pour ne pas dire impossible, de décrire simplement une tribu engendrée (ne pas se dire qu'il suffit de prendre des (ou même des suites de) réunions et intersections dénombrables des ensembles de départ ; c'est bien plus mystérieux). Un résultat remarquable et difficile, pour des espaces métriques $(X, d)$ et $(X', d')$ muni de leur tribu borélienne, est que

$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X') = B(X \times X')$$

où l'espace $X \times X'$ est muni de la topologie produit, qui correspond aussi à la distance $\delta((x, x'), (y, y')) = \max(d(x, y), d'(x', y'))$.

Dans le cas où l'on se donne des mesures $\mu$ et $\mu'$ sur $(E, \mathcal{E})$ et $(E', \mathcal{E}')$, respectivement, toutes deux $\sigma$-finies, alors on peut définir de manière unique une mesure, dite produit et notée $\mu \otimes \mu'$ sur $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$, qui est caractérisée par la propriété suivante :

$$\mu \otimes \mu'(A \times A') = \mu(A) \, \mu(A'), \qquad \forall (A, A') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}'.$$

Les théorèmes de Fubini concernent l'intégration d'une fonction $f$ sur $E \times E'$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ ou dans $\mathbb{C}$, qui est $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$ mesurable (avec comme d'habitude les boréliens à l'arrivée).

D'abord, on regarde, comme toujours, le cas positif. Dans ce cas, le Théorème de Fubini positif (ou Théorème de Fubini-Tonelli) dit que

- Les fonctions sections $x \to \int_{E'} f(x, y) \, d\mu'(y)$ et $y \to \int_E f(x, y) \, d\mu(x)$ sont bien définies et mesurables sur $E$ et $E'$, respectivement ;
- L'intégrale $\int_{E \times E'} f d(\mu \otimes \mu')$ peut se calculer de deux manières (en intégrant les fonctions sections).

Le fait qu'on peut "intervertir" les intégrales n'est qu'un des aspects du théorème de Fubini.

Ensuite, on regarde la cas où $f$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$. C'est plus délicat. Il faut (bien sûr) supposer que $f$ est $\mu \otimes \mu'$- intégrable. Mais heureusement, pour vérifier cette hypothèse, on dispose du Fubini positif !

Terminons par quelques remarques sur la mesure de Lebesgue que l'on note souvent $\ell$ ou simplement $dx$. Celle-ci est diffuse, donc en particulier, pour une fonction positive ou intégrable sur un intervalle $I$, on a pour $a \in I$,

$$\int_I f = \int_{I \setminus \{a\}} f.$$

Par exemple, on a

$$\int_{[0,+\infty[} \frac{dx}{x} = \int_{]0,+\infty[} \frac{dx}{x} \quad (= +\infty).$$

Il ne faut pas imaginer que vous allez régler des problèmes d'intégrabilité en enlevant un point.

Rappelons les liens entre l'intégrale de Lebesgue et les intégrales classiques (de Riemann) ou généralisées pour des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. Si $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$, avec $a \leq b$, elle est bien sur mesurable et intégrable, et on a

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f$$

où le terme de gauche est l'intégrale de Lebesgue et celui de droite l'intégrale classique. Si maintenant $I$ est un intervalle ouvert, typiquement $I = [0, +\infty[$ ou $]0, 1]$, on peut peut considérer l'intégrale généralisée $\int_\alpha^\beta f$, où $\alpha = \inf I$ et $\beta = \sup I$, qui est définition par la limite, quand elle existe (ce dont il faut donc s'assurer avant), de $\int_a^b f$ avec $a \to \alpha$ et $b \to \beta$ (dans le cas où il faille approcher les deux bornes, mais parfois l'intégrale n'est généralisée que d'un côté). Dans le cas où $f$ est positive, cette limite existe toujours (par monotonie) dans $[0, +\infty]$ et coincide avec l'intégrale de Lebesgue, par convergence monotone :

$$\int_I f = \lim_{a\to\alpha, b\to\beta} \int_{[a,b]} f = \lim_{a\to\alpha, b\to\beta} \int_a^b f = \int_\alpha^\beta f.$$

Dans le cas d'une fonction de signe quelconque, il faut faire attention. Dans le cas d'une intégrale généralisée absolument convergente, c'est-a-dire telle que $\int_\alpha^\beta |f| < +\infty$, alors les limites et les intégrales sont bien définies, et par convergence dominée la relation ci-dessus est encore vraie. Par contre, on ne peut pas donner de sens, *a priori*, à l'intégrale de Lebesgue sur $I$ d'une intégrale généralisée semi-convergente.

## 0.2 Inégalités

Dans toute cette section , $(X, \mathcal{S}, \mu)$ désigne un espace mesuré quelconque. Lorsque des hypothèses supplémentaires seront nécessaires, elles seront précisées.

### Inégalité arithmético-géométrique

Si $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|x - y|^2/2 \geq 0$, ce qui s'écrit aussi $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. On peut aussi réecrire cela en disant que

$$\forall a, b \geq 0, \qquad \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \tag{1}$$

L'inégalité suivante, qui est à la base de la plupart des inégalités de ce chapitre, est une version pour une combinaison plus générale. Elle exprime que le logarithme est concave.
Il peut être pratique d'autoriser la valeur $+\infty$. Si besoin, on conviendra que $0 \cdot (+\infty) = 0$.

**Proposition 0.7** (Inégalité arithmético-géométrique). *Soit $t \in ]0, 1[$ et $a, b \in [0, +\infty]$ . Alors*

$$a^{1-t}b^t \leq (1 - t)a + tb \tag{2}$$

*avec, lorsque $a$ et $b$ sont finis, égalité si et seulement si $b = a$.*

L'inégalité est aussi vraie, mais triviale, lorsque $t = 0$ ou $t = 1$.

*Démonstration.* Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité est vraie, et il y a égalité si et seulement si $b = 0$. Si $a = +\infty$ ou $b = \infty$, l'inégalité est trivialement vraie. On peut donc supposer $0 < a, b < +\infty$.

L'inégalité exprime exactement le fait que le logarithme est concave.

On peut aussi en donner une démonstration sans utiliser le logarithme. Introduisons la fonction $C^1$ sur $]0, +\infty[$ définie par

$$\forall a > 0, \quad f(a) = a^{1-t}b^t - (1-t)a - tb. \tag{3}$$

On a $f'(a) = (1-t)a^{-t}b^t - (1-t) = (1-t)\left[\left(\frac{b}{a}\right)^t - 1\right]$. Ainsi, $f$ est (strictement) croissante sur $]0, b]$ et (strictement) décroissante sur $[b, +\infty[$, ce qui veut dire qu'elle atteint son maximum en $a = b$. Or $f(b) = 0$ et donc $f \leq 0$. La stricte monotonie assure que $f$ ne s'annule que en $b$. □

Pour $\lambda > 0$, on peut multiplier $a$ par $\lambda^{1/(1-t)}$ et $b$ par $1/\lambda^{1/t}$ et on obtient le

**Lemme 0.8** (Inégalité arithmético-géométrique bis)**.** *Soit $t \in ]0, 1[$. Alors, pour $a, b \in [0, +\infty]$ et $\lambda > 0$ on a*

$$a^{1-t}b^t \leq (1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}}a + t\frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}} \tag{4}$$

*et, lorsque $a$ et $b$ sont finis, il y a égalité si et seulement si $\lambda^{\frac{1}{1-t}}a = \frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}}$.*
*En particulier, si $0 < a, b < +\infty$, il y a égalité pour un certain $\lambda > 0$, ce qui peut se résumer par :*

$$\inf_{\lambda>0}\left((1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}}a + t\frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}}\right) = \min_{\lambda>0}\left((1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}}a + t\frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}}\right) = a^{1-t}b^t. \tag{5}$$

*Démonstration.* Il suffit donc de prendre $\lambda := \left(\frac{b}{a}\right)^{t(1-t)}$. □

On préfère parfois introduire $p = \frac{1}{1-t} \in ]1, +\infty[$ et $q = \frac{1}{t} \in ]1, +\infty[$, qui vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ –on dit que ces nombres sont *conjugués*[1]–, et remplacer $a$ par $a^p$ et $b$ par $b^q$, de sorte qu'on trouve le

**Lemme 0.9** (Inégalité arithmético-géométrique bis bis)**.** *Soit $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour $a, b \in [0, +\infty]$ et $\lambda > 0$ on a*

$$ab \leq \lambda^p\, a^p/p + \lambda^{-q}\, b^q/q \tag{6}$$

*et, lorsque $a$ et $b$ sont finis, il y a égalité si et seulement si $\lambda^p a^p = \lambda^{-q} b^q$.*
*En particulier, si $0 < a, b < +\infty$, il y a égalité pour un certain $\lambda > 0$, ce qui peut se résumer par :*

$$\inf_{\lambda>0}\left(\lambda^p a^p/p + t\lambda^{-q}b^q/q\right) = \min_{\lambda>0}\left(\lambda^p a^p/p + t\lambda^{-q}b^q/q\right) = ab. \tag{7}$$

Sous cette dernière forme, l'inégalité arithmético-géométrique s'appelle aussi *inégalité d'Young*. L'inégalité la plus simple et la plus classique (liée à Cauchy-Schwartz) correspond à $t = 1/2$, c'est-à-dire $p = q = 2$.

1. par exemple $p = q = 2$ ou $p = 1$ et $q = +\infty$ (ici non considéré)

**Inégalités de Hölder**

**Proposition 0.10** (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $f, g : X \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables positives et $t \in ]0, 1[$. Alors on a*

$$\int f^{1-t} g^t \, d\mu \leq \Big( \int f \, d\mu \Big)^{1-t} \Big( \int g \, d\mu \Big)^t.$$

*De plus, si $0 < \int f \, d\mu, \int g \, d\mu < +\infty$, il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $g = \lambda f$ $\mu$-pp.*

**Remarque 0.11.** *Vous noterez que l'inégalité est bien homogène en $f$ et $g$.*

**Remarque 0.12.** *Pour une fonction positive $f$ et $r > 0$ on a*

$$\int f^r \, d\mu > 0 \Longleftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = \mu(\{x \in X \; ; \; f(x) \neq 0\}) \neq 0,$$

*ce qui veut dire qu'il existe $A \in \mathcal{S}$, avec $\mu(A) \neq 0$ tel que $f > 0$ sur $A$. On écrit aussi "$f \not\equiv 0$ $\mu$-pp" qu'il faut comprendre comme "$f$ n'est pas égale à une fonction nulle $\mu$-pp".*

*Démonstration.* D'abord, on remarque que l'inégalité devient une égalité lorsque $f = g$.
Si $\int f \, d\mu = +\infty$, il n'y a rien à montrer. De même, si $\int f \, d\mu = 0$ alors $f = 0$ $\mu$-pp et l'inégalité est triviale. Idem avec $g$. On supposera donc que $0 < \int f \, d\mu, \int g \, d\mu < +\infty$.
On va utiliser deux fois le Lemme 0.8. Tout d'abord, pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in X$ on a

$$f(x)^{1-t} g(x)^t \leq (1-t) \lambda^{\frac{1}{1-t}} f(x) + t \lambda^{-\frac{1}{t}} g(x)$$

et donc en intégrant on trouve que pour tout $\lambda > 0$,

$$\int f^{1-t} g^t \, d\mu \leq (1-t) \lambda^{\frac{1}{1-t}} \int f \, d\mu + t \lambda^{-\frac{1}{t}} \int g \, d\mu.$$

En prenant l'infimum sur les $\lambda$, ou trouve donc bien $\int f^{1-t} g^t \, d\mu \leq \Big( \int f \, d\mu \Big)^{1-t} \Big( \int g \, d\mu \Big)^t$.
Pour la réciproque, on suppose donc que les intégrales sont non-nulles et finies. On reprend la démonstration ci-dessous mais au lieu de prendre l'infimum sur les $\lambda$, on suppose qu'on a pris, dès le début le $\lambda = \lambda_0 > 0$ optimal pour lequel l'infimum est atteint (la valeur valeur exacte, dont on n'a pas besoin, est $\lambda_0 = \Big( \frac{\int g \, d\mu}{\int f \, d\mu} \Big)^{t(1-t)} > 0$). Alors on a

$$\Big( \int f \, d\mu \Big)^{1-t} \Big( \int g \, d\mu \Big)^t - \int f^{1-t} g^t \, d\mu = \int \Big[ (1-t) \lambda_0^{\frac{1}{1-t}} f(x) + t \lambda_0^{-\frac{1}{t}} g(x)^t - f(x)^{1-t} g(x)^t \Big] \, d\mu.$$

Le terme sous l'intégrale est positif, et donc pour que son intégrale soit nulle, il faut qu'il soit nul $\mu$-pp. Mais par l'étude des cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique, cela implique que $\lambda_0^{\frac{1}{1-t}} f = \lambda_0^{-\frac{1}{t}} g$ $\mu$-pp. □

Il y a beaucoup de formulations équivalentes de l'inégalité de Hölder. En voici une pour ceux qui préfèrent les $p, q$. On rappelle que $p/q = p - 1$.

**Proposition 0.13** (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $p, q \in ]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $f, g : X \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables positives sur $X$. Alors,*

$$\int f g \, d\mu \leq \Big( \int f^p \, d\mu \Big)^{1/p} \Big( \int g^q \, d\mu \Big)^{1/q}.$$

*avec égalité lorsque $g = f^{p-1}$. De plus, lorsque $0 < \int f^p \, d\mu, \int g^q \, d\mu < +\infty$ il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $g^q = \lambda f^p$ (i.e. $g = \tilde{\lambda} \, f^{p-1}$ pour un $\tilde{\lambda} \geq 0$).*

*Démonstration.* On applique la proposition précédente en remplaçant $(1-t)$ par $\frac{1}{p}$, et donc $t$ par $\frac{1}{q}$, et en l'appliquant à $f^p$ à la place de $f$ et $g^q$ à la place de $g$. $\square$

Le cas le plus rencontré est le cas $p = q = 2$, et l'inégalité s'appelle alors *inégalité de Cauchy-Schwartz.*

**Remarque 0.14.** *Le cas du couple $p = 1$ et $q = \infty$ est trivial et s'énonce comme suit : si $f, g$ sont deux fonctions mesurables positives sur $X$, alors*

$$\int fg\,d\mu \leq \big(\sup g\big) \int f\,d\mu.$$

*On peut remplacer le supremum par le supremum essentiel.*

**Remarque 0.15.** *Une conséquence de l'inégalité de Hölder est que si on se donne $p$ et $q$ dans $]1, +\infty[$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive avec $\int f^p\,d\mu < +\infty$, alors*

$$\Big(\int f^p\,d\mu\Big)^{1/p} = \sup_{g\geq 0} \frac{\displaystyle\int fg\,d\mu}{\Big(\displaystyle\int g^q\,d\mu\Big)^{1/q}} = \sup_{g\geq 0,\, \int g^q\,d\mu \leq 1} \int fg\,d\mu.$$

*où les sup sont pris sur les fonction mesurables positives telles que $0 < \int g^q\,d\mu < +\infty$). De plus ce sup est atteint. En effet, l'inégalité de Hölder montre que $\dfrac{\displaystyle\int fg\,d\mu}{\Big(\displaystyle\int g^q\,d\mu\Big)^{1/q}} \leq \Big(\int f^p\,d\mu\Big)^{1/p}$, et donc* idem *pour le sup sur $g$. On voit par ailleurs qu'il y a égalité si $g = f^{p-1}$ par exemple (si $f$ est non nulle ; si $f$ est nulle $\mu$-pp, on prend n'importe que $g$), ce qui donne à la fois l'égalité voulue, et le fait que le sup est atteint. La deuxième inégalité découle par homogénéité.*
*On retrouvera une formule similaire lors de l'étude de la dualité $L^p - L^q$.*

### Inégalité de Minkowski

**Proposition 0.16.** *Soit $p \in ]1, +\infty[$. Si $f, g : X \to [0, +\infty]$ sont deux fonctions mesurables positives sur $X$, alors*

$$\Big(\int (f+g)^p\,d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int f^p\,d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int g^p\,d\mu\Big)^{1/p}.$$

*Si $0 < \int f^p\,d\mu, \int g^p\,d\mu < +\infty$, alors il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $g = \lambda f$ $\mu$-pp.*

*Démonstration.* Soit $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On rappelle que $q(p-1) = p$. Si $f$ ou $g$ est nulle $\mu$-pp, il n'y a rien à montrer ; on supposera donc que ce n'est pas le cas. Idem si l'une des intégrales de droite vaut $+\infty$. On suppose donc les intégrales du terme de droite sont finies et que l'intégrale du terme de gauche est non-nulle.
On a

$$\forall a, b \in [0, +\infty], \qquad (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{8}$$

On montrera cette inégalité plus loin. Cela permet de voir, en l'appliquant à $a = f(x)$ et $b = g(x)$ et en intégrant sur $X$ par rapport à $d\mu(x)$ que si les intégrales de droites sont finies, l'intégrale de gauche aussi. Alors, par le cas d'égalité (trivial) dans l'inégalité de Hölder, on sait qu'il existe $H \geq 0$ tel que

$$\Big(\int (f+g)^p\,d\mu\Big)^{1/p} = \int (f+g)H\,d\mu \quad \text{et} \quad \int H^q\,d\mu = 1.$$

De façon explicite $H = \dfrac{1}{\left(\int (f+g)^p \, d\mu\right)^{1/q}} (f+g)^{p-1}$ sur $X$. On a donc,

$$\Big(\int (f+g)^p \, d\mu\Big)^{1/p} = \int fH \, d\mu + \int gH \, d\mu \leq 1 \times \Big(\int f^p \, d\mu\Big)^{1/p} + 1 \times \Big(\int g^p \, d\mu\Big)^{1/p},$$

où l'on a utilisé deux fois l'inégalité de Hölder. Cela montre l'inégalité voulue.
On voit qu'il y a égalité si $g = \lambda f$ $\mu$-pp. Réciproquement, pour qu'il y ait égalité, il faut que dans la preuve ci-dessus, il y ait égalité dans les deux inégalités de Hölder utilisées. Et donc, il faut que $\mu$-pp $f = \lambda_1 H^{p-1}$ et $g = \lambda_2 H^{p-1}$, avec $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Donc il faut que $g = \lambda f$ pour un certain $\lambda > 0$. □

**Convexité et inégalité de Jensen**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Le cas le plus important, de loin, est celui où $I = \mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$ on a

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Par associativité du barycentre, cette propriété est équivalente à la forme plus générale suivante : pour $m \geq 1$, $x_1, \ldots, x_m \in I$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in [0,1]$ tels que $\alpha_1 + \ldots \alpha_m = 1$,

$$f\big(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m\big) \leq \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_m f(x_m).$$

Une fonction $f$ est dite concave sur $I$ si les inégalités précédentes ont lieu dans l'autre sens, c'est-à-dire si $-f$ est convexe sur $I$.
Si $f$ est convexe sur $I$, alors on voit que pour tout $s, t, u \in I$

$$s < t < u \Longrightarrow \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}. \tag{9}$$

En fait, la propriété (9) est équivalente à la convexité de $f$ sur $I$. En effet, pour $s, u \in I$, $s < u$, et $t \in ]s, u[$, introduisons $r \in [0,1]$ tel que

$$t = (1-r)s + ru,$$

à savoir $r = \frac{t-s}{u-s}$ et donc $1 - r = \frac{u-t}{u-s}$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \quad &\Leftrightarrow \quad [(u-t) + (t-s)]f(t) \leq (u-t)f(s) + (t-s)f(u) \\ &\Leftrightarrow \quad f(t) \leq (1-r)f(s) + rf(u) \end{aligned}$$

On peut tirer plusieurs propriétés intéressantes de l'inégalité (9).

**Proposition 0.17.** *Soit $f$ une fonction dérivable (en pratique $C^1$) sur un intervalle ouvert $I$. Alors $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si $f'$ est croissante sur $I$.*

*En particulier, une fonction deux fois dérivable sur $I$ est convexe sur $I$ si et seulement si $f'' \geq 0$ sur $I$.*

*Démonstration.* Supposons d'abord que $f$ convexe. Soit $s, v \in I$ avec $s < v$. Alors pour tout $t, u \in I$ tels que $s < t < u < v$ on a, en appliquant deux fois l'inégalité (9),

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}. \tag{10}$$

En faisant $t \to s^+$ et $u \to v^-$, on trouve donc que $f'(s) \leq f'(v)$.

Réciproquement, supposons $f'$ est croissante, et soit $x, y \in I$, $x < y$, et $z \in ]x, y[$. Par le théorème des accroissement finis, il existe $\alpha \in [x, z]$ tel que $f(z) - f(x) = (z - x)f'(\alpha)$ et $\beta \in [z, y]$ tel que $f(y) - f(z) = (y - z)f'(\beta)$. Comme $\alpha \leq \beta$ on a $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$, ce qui donne la propriété (9) pour le triplet $x < z < y$. □

**Remarque 0.18.** *La propriété* (9) *sous la forme* (10) *montre qu'en tout point, $f$ admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite, que ces dérivées sont croissantes, et que $f'_g \leq f'_d$ en tout point.*

**Proposition 0.19.** *Soit $f$ une fonction convexe sur un intervalle $I$. Alors en tout point $x_0$ de l'intérieur de $I$, il existe $\beta_0 \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \geq f(x_0) + \beta_0(x - x_0).$$

*Démonstration.* Pour tout $s, u \in I$ tel que $s < x_0 < u$, on a

$$\frac{f(x_0) - f(s)}{x_0 - s} \leq \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0}.$$

Notons $\beta = \sup_{s \in I, s < x_0} \dfrac{f(x_0) - f(s)}{x_0 - s}$. C'est un nombre fini, car la quantité est majorée par n'importe quel $\frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0}$ avec $u > x_0$.

Pour $x \in I$, on a, lorsque $x < x_0$, $f(x_0) - f(x) \leq \beta(x_0 - x)$ par définition de $\beta$, et lorsque $x > x_0$, $\beta(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)$ d'après l'inégalité ci-dessus (avec $u = x$). □

Géométriquement, on a donc qu'en tout point $x_0$ de l'intérieur de $I$, on peut trouver une droite tangente au graphe de $I$ en $x_0$, telle que $f$ reste au dessus de cette droite. Lorsque $f$ est dérivable, on peut (et on doit) prendre $\beta = f'(x_0)$. Dans ce cas on a,

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

**Exemple 0.20.** La fonction log est concave sur $]0, +\infty[$, en effet sa dérivée seconde vaut $\log''(x) = -1/x^2 \leq 0$ pour tout $x > 0$. On a donc, pour tout $a, b > 0$,

$$\log((1 - t)a + tb) \geq (1 - t)\log(a) + t\log(b) = \log(a^{1-t}b^t)$$

ce qui s'écrit encore, en prenant l'exponentielle (qui est croissante) : $(1 - t)a + tb \geq a^{1-t}b^t$.

Exemples de fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ : $x \to |x|$ (inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$), $x \to e^x$, $x \to x^2$, et plus généralement $x \to |x|^p$, avec $p > 1$. Cet exemple permet de voir que pour $a, b \geq 0$ on a $\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p$, ce qui donne (8).

**Théorème 0.1** (Inégalité de Jensen)**.** *Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ (en général $I = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$). Si $\mu$ est une* probabilité *sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ et $f$ une fonction $\mu$-intégrable à valeurs dans un intervalle $I$, alors $\int_X f\, d\mu \in I$, $\int_X \varphi(f)\, d\mu$ existe dans $]-\infty, +\infty]$ et*

$$\int_X \varphi(f)\, d\mu \geq \varphi\left(\int_X f\, d\mu\right).$$

*avec égalité si $f$ est constante (i.e. si $\exists c \in I$ tel que $f \equiv c$ $\mu$-pp)*

*Démonstration.* Soient $a := \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b := \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, de sorte que l'intérieur de $I$ est $]a, b[$. Ayant $a \leq f \leq b$, comme $\mu$ est une probabilité,

$$a = \int_X a\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu \leq \int_X b\, d\mu = b,$$

donc $m := \int_X f\, d\mu \in I$. De plus, dans l'éventualité où $a \in I$, si $m = a$, on doit avoir $f = a$ $\mu$-pp, puisque $f \geq a$ et $\int (f - a)\, d\mu = 0$, et alors l'inégalité à montrer devient triviale. Même chose si $m = b$. On supposera donc dans la suite que $m$ appartient à l'intérieur de $I$.

Comme $\varphi$ est convexe, il existe au moins une droite située en-dessous du graphe de $\varphi$ et passant par $(m, \varphi(m))$, d'équation $y = \beta(x-m) + \varphi(m)$. Ceci se traduit par

$$\varphi(u) \geq \beta(u-m) + \varphi(m) \qquad u \in I,$$

et donc pour tout $x \in X$,

$$\varphi \circ f(x) \geq \beta(f(x)-m) + \varphi(m).$$

La fonction $\varphi \circ f$ étant minorée par une fonction intégrable, elle admet une intégrale (qui ne peut être égale à $-\infty$) et

$$\int_X \varphi \circ f \, d\mu \geq \beta \int_X (f-m)\, d\mu + \int_X \varphi(m)\, d\mu = 0 + \varphi(m),$$

par linéarité (pour les fonctions $\mu$-intégrables), et parce que $\mu$ est une probabilité. □

**Remarque 0.21.** *En général, il peut y avoir d'autres cas d'égalité que les fonctions constantes.Par exemple, si $\varphi$ est constante ou plus généralement, affine, il y a égalité pour toute fonction $f$. Par contre, les fonctions constantes sont les seuls cas d'égalité si $\varphi$ est strictement convexe. La fonction $\varphi$ est dite* strictement convexe *sur $I$ si pour $s, t \in I$, $s \neq t$ et $\lambda \in ]0,1[$, on a*

$$\varphi((1-\lambda)s + \lambda t) < (1-\lambda)\varphi(s) + \lambda\varphi(t).$$

*Cela équivaut à dire que le graphe de $\varphi$ ne contient pas de segment. En particulier, toute tangente ne touche le graphe qu'en un seul point.*

## 0.3 Espace $\mathcal{L}^p$ et espace $L^p$

Si $f$ est une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note, pour $p \in [1, +\infty[$

$$\| f \|_p := \left( \int_E | f |^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

qu'on appelle[2] *norme* $\mathcal{L}^p$ de $f$, et lorsque $p = \infty$,

$$\| f \|_\infty := \inf\{a > 0 \; ; \; \mu(\{| f | \geq a\}) = 0\},$$

qu'on appelle[3] *supremum essentiel* de $f$.

**Définition 0.22** ( $p \in [1, +\infty[$ )**.** On note $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{S}, \mu)$, ou $\mathcal{L}^p(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables à valeurs dans ans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $| f |^p$ est $\mu$-intégrable, i.e. telles que $\|f\|_p < +\infty$.

**Définition 0.23** ( $p = \infty$ )**.** On note $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{S}, \mu)$, ou $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $f$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui sont *$\mu$-essentiellement bornées*, c'est-à-dire telles qu'il existe $a > 0$ pour lequel $\mu(\{| f | \geq a\}) = 0$, soit encore telles que $\|f\|_\infty < +\infty$.

On remarquera que pour $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ on a

$$\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0.$$

En effet, on a $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = \mu\Big( \bigcup_{n \geq 1} \Big\{ |f| \geq \|f\|_\infty + \dfrac{1}{n} \Big\} \Big)$ et on conclut par convergence monotone. En particulier, pour toute partie mesurable $A$ on a $\mu(A) = \mu(A \cap \{|f| \leq \|f\|_\infty\})$.

2. mais dont nous verrons qu'il ne s'agit en fait que d'une semi-norme
3. mais on devrait dire $\mu$-supremum essentiel

**Remarque 0.24.** *Si on éprouve le besoin de préciser que l'on travaille avec des fonctions réelles ou des fonctions complexes, on peut ajouter "espace $\mathcal{L}^p$-réel" ou "espace $\mathcal{L}^p$-complexe".*

**Remarque 0.25.** *Dans les deux définitions ci-dessus, on peut autoriser la fonction $|f|$ à prendre la valeurs $+\infty$ (en particulier on peut considérer des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$). Cela ne change rien du point de vue de l'intégration par rapport à $\mu$, car pour une fonction dans $\mathcal{L}^p$, cela ne peut avoir lieu que sur un ensemble de $\mu$-mesure nulle. En effet, si $p$ est fini, $|f|^p$ $\mu$-intégrable entraîne que $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$. Pour $p = +\infty$, si $\|f\|_\infty < +\infty$, cela veut dire qu'il existe $a > 0$ fini tel que $\mu(\{|f| \geq a\}) = 0$, et $\mu(\{|f| = +\infty\}) \leq \mu(\{|f| \geq a\})$.*

**Proposition 0.26.** *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, on a*

1. *$\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$, et*
2. *$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

*En particulier, $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel.*

*Démonstration.* Le premier point est évident par linéarité de l'intégrale si $p < \infty$. Si $p = +\infty$,

$$\begin{aligned}\| af \|_\infty &= \inf\{m > 0 : \mu(\{| af | \geq m\}) = 0\} = | a | \inf\{m' > 0 : \mu(\{| af | \geq | a |m'\}) = 0\} \\ &= | a | \, inf\{m' > 0 : \mu(\{| f | \geq m'\}) = 0\} = | a | \, \| f \|_\infty.\end{aligned}$$

Le deuxième point est évident pour $p = 1$ à partir de l'inégalité $|f + g| \leq |f| + |g|$. Pour $p \in ]1, +\infty[$, on combine cela avec l'inégalité de Minkowski. Pour le cas $p = \infty$, on remarque que si $a > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ on a,

$$\mu(\{|f+g| \geq a\}) \leq \mu(\{|f| + |g| \geq a\}) = \mu\Big(\{|f| + |g| \geq a\} \cap \{|f| \leq \|f\|_\infty\} \cap \{|g| \leq \|g\|_\infty\}\Big) = \mu(\emptyset) = 0,$$

et donc $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. □

Par ailleurs, si $f$ est la fonction nulle, on a $\|f\|_p = 0$. Alors que manque-t-il à $\|\cdot\|_p$ pour être une norme sur $\mathcal{L}^p$ ? Pas grand chose, mais le problème vient du fait que pour $f \in \mathcal{L}^p$ on a

$$\|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \ \ \mu\text{-p.p.}$$

Cela est clair pour $p < +\infty$, puisque dire que la fonction positive $|f|^p$ a une intégrale nulle, cela veut dire qu'elle est nulle $\mu$-pp. Pour $p = \infty$, si $\|f\|_\infty = 0$, alors $\mu(\{|f| > 0\}) = \mu(\bigcap_{n\geq 1}\{|f| \geq \frac{1}{n}\}) = 0$, par convergence monotone.
Ainsi, on veut construite un espace tel que $f$ nulle $\mu$-presque partout veut dire que $f$ est le vecteur nul. Pour cela, on fait le quotient de $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence suivante

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \ \ \mu\text{-p.p.} \Longleftrightarrow \|f - g\|_p = 0.$$

Ainsi, on considère l'ensemble quotient $\mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ (que l'on notera $L^p(\mu)$) formé par les classes d'équivalences modulo $\sim$. Notez que la relation d'équivalence associée à chaque $\|\cdot\|_p$ ne dépend pas de $p$ et est la même pour tous les espaces $\mathcal{L}^p$ : la classe d'une fonction $f$ est constituée par les fonctions qui coïncident avec $f$ $\mu$-presque partout.
Si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions mesurables nulles $\mu$-presque partout, on peut aussi écrire

$$f \sim g \Longleftrightarrow f - g \in \mathcal{N}.$$

Or $\mathcal{N}$ est un espace vectoriel (et un sous-espace vectoriel de tout $\mathcal{L}^p(\mu)$), et il est classique de voir que les structures d'espace vectoriel passent au quotient. En résumé, on obtient la

**Définition 0.27.** Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(E, \mathcal{S}, \mu)$, ou $L^p(\mu)$, l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence définie par l'égalité $\mu$-p.p.
Soit $\tilde{f} := \{g \ ; \ g = f \ \mu\text{-p.p.}\}$ la classe d'équivalence de $f$. Les opérations classiques s'étendent aux classes d'équivalence, avec $\widetilde{af} = a\tilde{f}$ et $\widetilde{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$.
On peut également définir $\| \cdot \|_p$ sur $L^p(\mu)$ par $\| \tilde{f} \|_p = \| f \|_p$, qui ne dépend pas du représentant choisi, car $f = g$ $\mu$-p.p. implique $\| f \|_p = \| g \|_p$.

**Remarque 0.28.** *On fera systématiquement l'abus de notation qui consiste à ne pas différencier fonctions et classes d'équivalences, c'est-à-dire à utiliser le même symbole pour une fonction $f$ et pour sa classe d'équivalence $\overline{f}$.*
*C'est une question d'habitude. La seule manière de comprendre $L^p$, c'est de l'utiliser. En fait, sur $L^p(\mu)$ on pense plutôt "$\mathcal{L}^p(\mu)$", c'est-à-dire à des fonctions, plutôt qu'à des classes d'équivalences, mais on se souvient que les objets ne sont définis que $\mu$-pp. Ainsi, par exemple, on a coutume de dire que deux fonctions $f$ et $g$ sont égales dans $L^p$ si elles coïncident $\mu$-pp (même si on devrait simplement dire qu'elle définissent la même classe d'équivalence dans $L^p(\mu)$).*

On a alors immédiatement ce que l'on cherchait.

**Théorème 0.29.** *L'ensemble $(L^p(\mu), \| \cdot \|_p)$ est un espace vectoriel normé.*

**Exemple 0.30.** On note $\ell_p(\mathbb{N})$ ou simplement $\ell_p$ l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, où $m$ est la mesure de comptage. On distingue parfois les espaces réels $\ell_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$et complexes $\ell_p^{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.
Soit $u \in \ell^p$. Si $p < \infty$, alors

$$\| u \|_p = \left( \sum_n | u_n |^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

tandis que si $p = +\infty$,

$$\| u \|_\infty = \sup_n | u_n |.$$

Il n'est pas besoin ici de quotienter $\mathcal{L}^p$ car $\| u \|_p = 0$ implique $u = 0$.
On a la même chose pour $\ell^p(\mathbb{Z}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), m)$.

## 0.4 Convergence dans $L^p$ et convergence simple

Rappelons que la topologie usuelle d'un espace vectoriel normé est la topologie relative à la distance $d(f, g) = \| f - g \|$. Ainsi on dira que la suite $(f_n)$ converge (vers $f$) dans $L^p$ si

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^p$ et $f \in L^p$ ;
b) $\lim_n \| f - f_n \|_p = 0$.

On rappelle que la suite $(f_n)$ converge simplement vers $f$ si $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pour $\mu$-presque tout $x$.
On remarque que si $(f_n)$ converge dans $L^1(\mu)$ vers $f$, alors $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$. La réciproque est fausse en général.
Le théorème de convergence dominée est généralement énoncé en terme de fonction intégrable, mais on peut aussi en donner une version (équivalente) $L^p$.

**Proposition 0.31** (Convergence $L^p$-dominée)**.** *Soit $p \in [1, +\infty[$. Si $f_n \to f$ $\mu$-p.p. et qu'il existe $g \in L^p$ tel que $| f_n | \leq g$ pour tout entier $n$, alors $f_n \stackrel{L^p}{\to} f$.*

*Démonstration.* On applique le théorème de convergence dominée. En effet, $| f_n - f |^p \leq (| f_n | + | f |)^p \leq 2^p | g |^p$ $\mu$-p.p., et par hypothèse $| g |^p$ est intégrable, donc comme $| f_n - f |^p \to 0$, $\mu$-p.p., on a la convergence vers 0 de $\int | f_n - f |^p \, d\mu$. □

**Proposition 0.32** (Extraction d'une sous-suite convergeant simplement)**.** *Soit* $p \in [1, +\infty]$. *Si* $f_n \overset{L^p}{\to} f$, *alors il existe une suite extraite de* $(f_n)$ *qui converge vers* $f$ $\mu$*-p.p.*
*Dans le cas* $p = +\infty$, *on a bien sûr beaucoup mieux :* $f_n \to f$ *uniformément en dehors d'un ensemble négligeable (en particulier,* $f_n \to f$ $\mu$*-p.p., pas besoin de sous-suite).*

*Démonstration.* On traite d'abord le cas $1 \leq p < +\infty$. Si $(f_n)$ converge vers $f$ dans $L^p(\mu)$, on peut trouver une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\|f_{n_k} - f\|_p \leq 2^{-k}.$$

Introduisons la suite de fonctions positives $u_k = |f_{n_k} - f|^p$. Par le théorème de Beppo-Levi (convergence monotone) on a

$$\int \sum_{k\geq 0} u_k(x)\, d\mu(x) = \sum_{k\geq 0} \int u_k(x)\, d\mu(x) \leq \sum_{k\geq 0} (2^{1/p})^{-k} < +\infty.$$

Par conséquent, il existe un ensemble de mesure nulle $\mathcal{N}$ tel que $\forall x \in X \setminus \mathcal{N}$, $\sum_{k\geq 0} u_k(x) < +\infty$. Donc, pour $x \in X \setminus \mathcal{N}$ la série réelle $\sum u_k(x)$ est convergente, et donc son terme général tend vers zéro, c'est à dire $f_{n_k}(x) \to f(x)$.
Pour $p = +\infty$, c'est la définition de la convergence dans $L^\infty(\mu)$. En effet, si on introduit $A_n = \{|f - f_n| > \|f - f_n\|_\infty\}$ et $A = \cup A_n$, alors $A$ est un ensemble de mesure nulle et

$$\forall x \in X \setminus A, \qquad |f(x) - f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty \to 0,$$

ce qui traduit le fait que $f_n$ converge uniformément vers $f$ sur $X \setminus A$. □

**Exemple 0.33.** Dans le cas de l'espace $\ell^p$ (pour $p < \infty$), une suite (de fonctions, aussi appelées suites ici...) $(u^{(n)})$ converge vers la fonction $u \in \ell^p$ si $\sum_k |\, u_k^{(n)} \,|^p < \infty$, si $\sum_k |\, u_k \,|^p < \infty$ et si

$$\lim_n \sum_k |\, u_k^{(n)} - u_k \,|^p = 0.$$

Ceci implique en particulier que $u_k^{(n)} \longrightarrow u_k$ lorsque $n \to \infty$. En conclusion, dans l'espace $\ell^p$ (vrai aussi si $p = +\infty$ par b)ii)),

$$f_n \overset{\ell^p}{\to} f \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \to f \qquad \text{simplement (partout).}$$

Évidemment, on n'a pas la réciproque, comme on peut le voir sur le contre-exemple $u^{(n)} = \mathbf{1}_{\{n\}}$. Alors la suite $(u^{(n)})$ converge simplement vers la fonction nulle car $u_k^{(n)} = 0$ pour tout $k > n$. Néanmoins pour tout $n$, la fonction $u^{(n)}$ est à distance 1 de la fonction nulle : $\|\, u^{(n)} - 0 \,\|_p = (\sum_k |\, u_k^{(n)} \,|^p)^{1/p} = 1$ pour tout $p$ (même $p = \infty$), et donc ne converge pas vers la suite nulle dans $\ell^p$. En effet, ici la plus petite fonction dominant la suite $(u^{(n)})$ est la fonction $v$ constante à 1. Pour $p < \infty$, cette fonction n'est pas dans $\ell^p$, donc on ne peut pas appliquer a). De plus, $v \in \ell^\infty$, ce qui montre aussi que la Proposition 0.31 n'est pas valide en général pour $p = \infty$.

**Corollaire 0.34.** *Soit* $p \in [1, +\infty]$. *Si l'on a la convergence de la suite* $(f_n)$ *vers* $f$ *dans* $L^p$ *et vers* $g$ $\mu$*-p.p. alors* $f$ *et* $g$ *sont égales* $\mu$*-p.p.*

*Démonstration.* On sait qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge $\mu$-p.p. vers $f$. Or la suite $(f_n)$ converge $\mu$-p.p. vers $g$, donc la sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ également. Ainsi $f = g$ $\mu$-p.p. □

## 0.5 Complétude des espaces $L^p$

**Théorème 0.35** (Théorème de Riesz–Fisher)**.** *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.*

*Démonstration.* Soit $(f_n)$ une suite de Cauchy de $L^p(\mu)$. On veut montrer qu'elle converge dans $L^p$. Remarquons qu'il suffit de montrer qu'une sous-suite $(f_{n_k})_k$ converge. En effet, si $f$ est la limite de cette sous-suite on a alors pour tout $n, k$,

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p,$$

et chaque terme peut être rendu petit, le premier en prenant $k$ assez grand (par définition de la limite), et le deuxième en prenant $k$ (puisque $n_k \geq k$) et $n$ assez grands, par le caractère de Cauchy.
Le caractère de Cauchy nous permet de trouver une sous-suite $(f_{n_k})$ tel que

$$\forall k \geq 0, \qquad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}.$$

Posons alors

$$u_0 = f_{n_0}, \qquad \text{et pour } k \geq 1 \;\; u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}},$$

de sorte que pour $N \geq 0$, la somme partielle vérifie

$$U_N := u_0 + u_1 + \ldots + u_N = f_{n_N}.$$

On se demande donc si la série $\sum u_k$ converge dans $L^p(\mu)$.
Posons, pour (presque tout) $x \in E$, et $N \geq 0$,

$$V_N(x) = \sum_{k=0}^{N} |u_k(x)|.$$

Pour $x$ fixé, c'est une suite croissante qui converge vers une limite que l'on note $V(x)$ :

$$V(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)| \in [0, +\infty].$$

La suite croissante $V_N(x)^p$ converge elle vers $V(x)^p$ lorsque $N \to +\infty$ (en convenant que $(+\infty)^p = +\infty$) et comme

$$\int V_N(x)^p \, d\mu(x) = \Big\| \sum_{k=0}^{N} |u_j| \Big\|_p^p \leq \Big( \sum_{k=0}^{N} \|u_j\|_p \Big)^p \leq \Big( \|f_{n_0}\|_p + \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \Big)^p =: M < +\infty,$$

on a par convergence monotone

$$\int V(x)^p \, d\mu(x) \leq M < +\infty.$$

Cela force l'ensemble $\mathcal{N} := \{V^p = +\infty\} = \{V = +\infty\}$ à être de mesure nulle. Pour $x \notin \mathcal{N}$, on a

$$V(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)| < +\infty,$$

ce que veut dire que la série dans $\mathbb{K}$, $\sum u_k(x)$ est elle aussi convergente, car absolument convergente ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet). Pour $x \notin \mathcal{N}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_j(x) = \lim_{N \to +\infty} U_N(x) = \lim_{N \to +\infty} f_{n_N}(x)$$

la somme de cette série convergente. On peut poser $f(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{N}$, si on veut, mais ce n'est pas nécessaire si on raisonne $\mu$-pp. Notez que $f$ est une fonction mesurable comme limite simple (presque partout) d'une suite de fonctions mesurables. Par ailleurs, on a $\mu$-pp, par convergence simple,

$$|f|^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\Big)^p = V^p$$

et donc $f \in L^p(\mu)$. Il reste à montrer la convergence dans $L^p(\mu)$. On a que $U_N$ converge simplement vers $f$ et $|U_N| \leq V_N \leq V$. Comme $V \in L^p(\mu)$, on peut conclure par convergence dominée dans $L^p(\mu)$ que $U_N$ converge vers $f$ dans $L^p(\mu)$ dans le cas $p < +\infty$. On a donc bien montré que la sous-suite $(f_{n_k})$ convergeait dans $L^p(\mu)$. □

## 0.6 Quelques rappels de topologie

**Définition 0.36.** Soit $X$ un ensemble. L'ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ est une *topologie* sur $X$

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$ ;
2. si $(V_i)_{i\in I}$, $V_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i\in I} V_i \in \mathcal{T}$ ;
3. si $n \geq 1$ et $(V_i)_{1\leq i\leq n}$, $V_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcap_{1\leq i\leq n} V_i \in \mathcal{T}$.

On dit alors que $(X, \mathcal{T})$ est un *espace topologique*. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les *ouverts* de la topologie. Les *fermés* sont les complémentaires des ouverts. Une intersection quelconque de fermés est fermé, mais seule une réunion finie de fermé a la certitude d'être fermé.

L'*intérieur* d'un ensemble $E$, notée $\overset{\circ}{E}$, est le plus grand ouvert contenu dans cet ensemble ; c'est aussi la réunion de tous les ouverts contenu dans cet ensemble.

L'*adhérence* d'un ensemble $E$, notée $\overline{E}$, est le plus petit fermé contenant cet ensemble ; c'est aussi l'intersection de tous les fermés contenant cet ensemble (par la définition des fermés et le 3 de la définition 0.36).

On dit que $V$ est un *voisinage* du point $x$ s'il existe un ouvert $U$ tel que $x \in U \subset V$.

**Définition 0.37.** Un ensemble $K \subset X$ est *compact* si, de tout recouvrement ouvert de $K$ (i.e. une famille d'ouverts $(O_j)_{j\in J}$ tels que $K \subset \bigcup_{j\in J} O_j$), on peut extraire un sous recouvrement fini (i.e. il existe $j_1, \cdots, j_n$ dans $J$ tels que $K \subset O_{j_1} \cup \cdots \cup O_{j_n}$).
On remarque que toute réunion finie d'ensembles compact est compact.

Un ensemble est dit *relativement* compact s'il est inclus dans un compact.

**Exercice 0.38.** Montrer qu'un fermé contenu dans un compact est compact.

**Remarque 0.39.** *Il est important de noter que la compacité est une notion intrinsèque qui ne dépend que de la topologie trace. On rappelle que pour un sous-ensemble $F \subset X$ d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, la topologie trace est donnée par $\mathcal{T}_F := \{V \cap F \;;\; V \in \mathcal{T}\}$ ; ainsi $(F, \mathcal{T}_F)$ est un espace topologique. Etant donné un ensemble $K \subset X$ on a*

$$K \text{ compact dans } (X, \mathcal{T}) \Longleftrightarrow K \text{ compact dans } (K, \mathcal{T}_K).$$

*En effet, étant donné une famille d'ouverts $(V_i)$ de $X$, dire que les $V_i$ recouvrent $K$ équivaut à dire que les $V_i \cap K$ recouvrent $K$.*

*Cela justifie la pertinence de la notion (topologique) d'espace compact : on dit que $K$ est un (espace) compact, si c'est un espace topologique pour lequel il est compact.*

*En particulier, si $A$ est une partie de $X$ muni de sa topologie trace $\mathcal{T}_A$, on voit que pour $K \subset A$ on a*

$$K \text{ compact de } (A, \mathcal{T}_A) \Longleftrightarrow K \text{ compact de } X,$$

*puisque que $(\mathcal{T}_A)_K = \mathcal{T}_K$.*

**Définition 0.40.** $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique est dit séparé (ou de Hausdorff) si et seulement si pour tous $(x, y) \in X^2$, il existe $U$ voisinage de $x$ et $V$ voisinage de $y$ tels que $U \cap V = \emptyset$.

**Théorème 0.41.** *Soit $X$ un espace de Hausdorff, $K \subset X$ un compact et $x \in X \setminus K$. Alors il existe $U$ et $V$ ouverts de $X$ tels que $K \subset U$, $x \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.*

On peut aussi dire que si $K$ est compact et $x \notin K$, alors il existe un ouvert $U$ tel que $K \subset U$ et $x \notin \overline{U}$. En effet, si $U$ et $V$ sont deux ouverts d'un espace topologique tels que $U \cap V = \emptyset$, alors $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ (pourquoi ?).

*Démonstration.* Comme $X$ est un espace de Hausdorff, pour chaque $y \in K$ il existe $U_y$ voisinage de $y$ et $V_y$ voisinage de $x$ tel que $U_y \cap V_y = \emptyset$. Alors $(U_y)_{y \in K}$ est un recouvrement ouvert de $K$ dont on peut extraire le recouvrement fini $(U_{y_j})_{1 \leq j \leq J}$ (car $K$ est compact). Ainsi $U = \bigcup_{1 \leq j \leq J} U_{y_j}$ est un ouvert contenant $K$ et $V := \bigcap_{1 \leq j \leq J} V_{y_j}$ est un ouvert contenant $x$. On a clairement $V \cap U = \emptyset$. □

Le complémentaire d'un compact dans un espace de Hausdorff est ouvert comme réunion des voisinages ouverts de chacun de ses points construits par le théorème 0.41. On obtient ainsi

**Corollaire 0.42.** *Un sous ensemble compact d'un espace de Hausdorff est fermé.*

**Exercice 0.43.** Montrer que, dans un espace de Hausdorff, l'adhérence d'un sous-ensemble d'un compact est compacte.
Montrer que, dans un espace de Hausdorff, un ensemble est relativement compact (i.e. contenu dans un compact) si et seulement si son adhérence est compacte.

**Théorème 0.44.** *Soient $(K_i)_{i \in I}$ des compacts de $X$, un espace de Hausdorff tels que $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$. Alors il existe $\{i_1, \cdots, i_n\} \subset I$ tel que $\bigcap_{1 \leq j \leq n} K_{i_j} = \emptyset$.*

*Démonstration.* On définit l'ouvert $V_i = (K_i)^c$ et on choisit $i_0 \in I$. Comme $K_{i_0}$ ne rencontre pas tous les $(K_i)_{i \neq i_0}$, $(V_i)_{i \neq i_0}$ est un recouvrement ouvert de $K_{i_0}$, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $K_{i_0} \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} V_{i_j}$. Ainsi $\bigcap_{0 \leq j \leq n} K_{i_j} = K_{i_0} \cap \bigcap_{1 \leq j \leq n} K_{i_j} = \emptyset$. □

**Définition 0.45.** Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit *localement compact* si tout point admet un voisinage compact, ce qui revient à dire qu'en tout point on peut trouver un voisinage ouvert relativement compact.

Par exemple, $\mathbb{R}$ est localement compact par le théorème de Borel-Lebesgue. Un exemple d'espace (métrique) non-localement compact est un espace vectoriel normé de dimension infinie.

**Théorème 0.46.** *Soit $U$ un ouvert de $X$, un espace de Hausdorff localement compact et $K \subset U$ un compact. Alors il existe un ouvert $V$ relativement compact tel que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

*Démonstration.* Comme tout point de $K$ admet un voisinage compact, on peut trouver un recouvrement fini de $K$ par des ouverts relativement compacts. La réunion de ces ouverts, disons, $O$, est ouverte relativement compacte. Quitte à remplacer $U$ par $U \cap O$, on voit que l'on peut supposer que $U$ est relativement compact, puisque $K \subset U \cap O \subset U$ et $U \cap O \subset O \subset \overline{O}$.

Si $U = X$, on pose $V := O$ et la preuve est achevée.

Si $U \neq X$, soit $C$ le complémentaire de $U$. Par le théorème 0.41, pour tout $c \in C$, il existe $V_c$ un ouvert tel que $K \subset V_c$ et $c \notin \overline{V_c}$. Ainsi si on pose $K_c := C \cap \overline{O} \cap \overline{V_c}$, $K_c$ est compact et l'intersection $\bigcap_{c \in C} K_c$ est vide. Par le théorème 0.44, il existe $c_1, \cdots, c_n$, des points de $C$, tels que $C \cap \overline{O} \cap \overline{V_{c_1}} \cap \cdots \cap \overline{V_{c_n}} = \emptyset$. On pose alors $V := O \cap V_{c_1} \cap \cdots \cap V_{c_n}$ qui a les propriétés annoncées comme $\overline{V} \subset \overline{O} \cap \overline{V_{c_1}} \cap \cdots \cap \overline{V_{c_n}}$. $\square$

Une fonction $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est dite continue si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert. Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on prend la topologie naturelle (celle associée à la distance $d(x,y) = |x-y|$) ; plus généralement, sur un espace vectoriel de dimension finie, on prendra implicitement la topologie de la norme (il n'y en a qu'une, les normes étant équivalente).

**Définition 0.47.** Soit $X$ un espace topologique et $f$ une fonction de $X$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ (où $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$).

— $f$ est semi-continue inférieurement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x;\ f(x) > \alpha\}$ est ouvert ;

— $f$ est semi-continue supérieurement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x;\ f(x) < \alpha\}$ est ouvert.

On vérifie alors que

1. une fonction à valeurs réelles est continue si et seulement si elle est à la fois semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement.
2. Les fonctions indicatrices d'ouverts sont semi-continues inférieurement, celles de fermés semi-continues supérieurement.
3. L'infimum d'une famille de fonctions semi-continues supérieurement est semi-continue supérieurement.
4. Le supremum d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement.

**Exercice 0.48.** Montrer que l'opposé d'une fonction semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) est semi-continue supérieurement (resp. inférieurement).

Montrer qu'une somme de fonctions semi-continues inférieurement (resp. supérieurement) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).

**Remarque 0.49.** ***(Rappels sur les limites supérieures et inférieures dans*** $[-\infty, \infty]$***).*** *On adjoint à* $\mathbb{R}$ *deux points supplémentaires :* $\infty$ *et* $-\infty$*. On utilise la notation* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$*. On étend l'ordre linéaire de* $\mathbb{R}$ *en posant* $-\infty \leq x \leq \infty$*, pour tout* $x \in [-\infty, \infty]$*. On a donc le fait suivant :*

• *Tout sous-ensemble non-vide* $A \subset [-\infty, \infty]$ *admet une borne supérieure (c'est-à-dire un plus petit majorant), borne supérieure que l'on note* $\sup A$*. De même,* $A$ *admet une borne inférieure (c'est-à-dire un plus grand minorant), borne inférieure notée* $\inf A$*.*

• *Soient* $A$ *et* $B$ *deux sous-ensembles non-vides de* $[-\infty, \infty]$ *tels que* $A \subset B$*. Alors* $\sup A \leq \sup B$ *et* $\inf A \geq \inf B$*.*

• *La convergence des suites dans* $[-\infty, \infty]$ *correspond à la notion habituelle. En plus des rappels du TD1 sur les suites réelles, on rappelle les faits suivants.*

*(i) Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$*, une suite à valeurs dans* $[-\infty, \infty]$ *supposée croissante. Alors elle converge dans* $[-\infty, \infty]$ *et* $\lim_{n \to \infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$*.*

*(ii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite à valeurs dans $[-\infty,\infty]$ supposée décroissante. Alors elle converge dans $[-\infty,\infty]$ et $\lim_{n\to\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*

*(iii) De toute suite dans $[-\infty,\infty]$, on extrait une suite monotone.*

*(iv) De toute suite dans $[-\infty,\infty]$, on extrait une suite qui converge dans $[-\infty,\infty]$.*

• *On fixe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[-\infty,\infty]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose*

$$A_n = \{u_{n+p}; p\in\mathbb{N}\}, \quad v_n = \sup A_n \quad \textit{et} \quad w_n = \inf A_n \ .$$

*Comme $A_{n+1}\subset A_n$, on a*

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad w_n \leq w_{n+1} \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \ .$$

*Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroisante et par les propriétés (ii) et (iii) ces suites convergent dans $[-\infty,\infty]$ et*

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} v_n \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} w_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \ .$$

*– La limite $\lim_{n\to\infty} v_n \in[-\infty,\infty]$ est appelée limite supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et elle est notée $\limsup_{n\to\infty} u_n$.*
*–La limite $\lim_{n\to\infty} w_n \in[-\infty,\infty]$ est appelée limite inférieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et elle est notée $\liminf_{n\to\infty} u_n$.*

• *Soit $\mathbf{u}=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite à valeurs dans $[-\infty,\infty]$. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $\mathbf{u}$, qui est noté $\Omega(\mathbf{u})$, se définit comme l'ensemble de toutes les limites possibles des suites extraites de $\mathbf{u}$. On rappelle les propriétés suivantes.*

*(i) La suite $\mathbf{u}$ converge si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n$, et dans ce cas on a $\lim_{n\to\infty} u_n = \limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_n u_n$.*

*(ii) L'ensemble $\Omega(\mathbf{u})$ n'est pas vide.*

*(iii) On a l'inclusion $\Omega(\mathbf{u}) \subset [\limsup_{n\to\infty} u_n \, , \, \liminf_{n\to\infty} u_n]$.*

*(iv) On a $\limsup_{n\to\infty} u_n \in\Omega(\mathbf{u})$ et $\liminf_{n\to\infty} u_n \in\Omega(\mathbf{u})$, et donc $\limsup_{n\to\infty} u_n = \sup \Omega(\mathbf{u})$ et $\liminf_{n\to\infty} u_n = \inf \Omega(\mathbf{u})$*

*(v) La suite $\mathbf{u}$ converge si et seulement et seulement si $\Omega(\mathbf{u})$ est réduit à un point, c'est-à-dire si et seulement si elle n'a qu'une seule valeurs d'adhérence. Dans ce cas, la valeurs d'adhérence unique est la limite de la suite.*

**Définition 0.50.** Soit $f : X \to \mathbb{C}$. Le support de $f$, noté supp$f$, est l'adhérence de $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$.

On notera $\mathcal{C}_c(X)$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ continues à support compact. En pratique, on n'a souvent pas besoin de connaitre de manière exacte le support. On utilise plutôt :

**Exercice 0.51.** Soit $X$ un espace de Hausdorff et $f : X \to \mathbb{C}$. Montrer que $f \in \mathcal{C}_c(X)$ si et seulement si $f$ est continue sur $X$ et il existe un compact $K \subset X$ tel que $f$ est identiquement nulle en dehors de $K$.

L'ensemble $\mathcal{C}_c(X)$ un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) pour l'addition usuelle des fonctions (et la multiplication par un scalaire). Mais c'est même une algèbre si on la munit du produit des fonctions.

**Remarque 0.52.** *En théorie de l'intégration, on travaille souvent avec l'image réciproque. Si $f : X \to Y$ et $B \subset Y$, on définit $f^{-1}(B) = \{x \in X \ ; \ f(x) \in B\}$. Si la notation peut prêter à confusion, il faut retenir que cet objet est très simple. Il est facile (d'un point de vue calculatoire/algoritmique) de tester si $x \in f^{-1}(B)$ : il suffit de vérifier si $f(x) \in B$. Si vous voulez, on peut écrire*

$$1_{f^{-1}(B)}(x) = 1_{f(x)\in B}$$

*où cette dernière expression doit se comprendre comme une fonction booléenne valant* $1$ *si la condition est vérifiée et zéro sinon. Travailler avec les images réciproques est facile, et d'ailleurs toutes les propriétés imaginables sont vraies avec* $f^{-1}$ *(genre image réciprique d'une union, d'une réunion, complémentaire, etc).*

*Il en va tout autrement de l'image directe d'un ensemble* $A \subset X$*,*

$$f(A) = \{f(a)\ ;\ a \in A\} = \{y \in Y\ ;\ \exists x \in A,\ f(x) = y\}.$$

*Il est difficile, voire impossible, de tester si un élément est dans l'image directe. L'image directe est un objet compliqué, et il faut faire attention que des propriétés élémentaires sont fausses pour l'image directe.*

*Notons que si* $f : X \to \mathbb{R}$ *est une application borélienne sur un espace mesurable* $(X, \mathcal{A})$*, l'image réciproque d'un borélien est par définition mesurable, alors que l'image d'une partie mesurable n'est pas nécessairement borélienne. Même pour une application continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, l'image d'un borélien n'est pas nécessairement un borélien.*

En général, on ne peut rien dire de l'image (directe) d'un ouvert ou d'un fermé, même par une application continue. Cependant :

**Proposition 0.53.** *Soient* $X$ *et* $Y$ *des espaces topologiques et* $f :\ X \to Y$ *continue. Alors si* $K \subset X$ *est compact,* $f(K)$ *est compact dans* $Y$*.*

**Exercice 0.54.** Démontrer la proposition 0.53.

**Notations.** La notation $K \prec f$ désigne un compact $K$ dans $X$ et un fonction $f$ dans $\mathcal{C}_c(X)$ tels que $0 \leq f \leq 1$ et $f_{|K} = 1$.
La notation $f \prec V$ désigne un ouvert $V$ dans $X$ et un fonction $f$ dans $\mathcal{C}(X)$ tels que $0 \leq f \leq 1$ et $\operatorname{supp} f \subset V$.
On notera $K \prec f \prec V$ quand, à la fois, on a $K \prec f$ et $f \prec V$.

**Théorème 0.55.** *(Lemme d'Urysohn) Soit* $X$ *un espace de Hausdorff localement compact,* $V$ *un ouvert de* $X$ *et* $K \subset V$ *un compact de* $X$*. Alors il existe* $f \in \mathcal{C}_c(X)$ *telle que* $K \prec f \prec V$*.*

*Démonstration.* Comme on cherche $f$ à support compact, on commence par remplacer l'ouvert $V$ par un ouvert relativement compact. Par le théorème 0.46, il existe un ouvert relativement compact $V_0$ tel que

$$K \subset V_0 \subset \overline{V}_0 \subset V.$$

Ainsi, si on trouve une fonction continue à valeurs dans $[0, 1]$ et ,telle que $K \subset \{f = 1\}$ et $V_0^c \subset \{f = 0\}$ (i.e. le support de $f$ est dans $\overline{V_0}$), on a gagné. Intuitivement, on veut poser $f = 1$ sur $K$, $f = 0$ on dehors de $V_0$, et utiliser l'espace entre $K$ et $V_0$ pour passer continûment de 1 à 0. Dans cet espace, on va insérer un nouvel ouvert et mettre $f = 1/2$ dessus ; on doit alors sur les deux bouts restants passer de 1 à $1/2$, et de $1/2$ à 0. Et on continue ainsi.

Pour cette construction "dichotomique", on va utiliser les nombres dyadiques de $[0, 1]$, c'est-à-dire l'ensemble dénombrable

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{k}{2^n}\ ;\ n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, 2, 3 \dots, 2^n\right\}.$$

Ces réels forment une partie dense de $[0, 1]$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, les intervalles (dits dyadiques) $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$, $k = 1, 2, \dots 2^n - 1$, forment une partition de $[0, 1[$ de pas $2^{-n}$ (notons au passage que 1 s'obtient comme limite de nombre dyadiques de $[0, 1[$, puisque $1 - 2^{-n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$). Les nombres dyadiques se construisent par récurrence comme suit : si on note $\mathcal{D}_n = \left\{\frac{k}{2^n}\ ;\ k = 0, 1, 2, 3 \dots, 2^n\right\}$, alors $\mathcal{D}_{n+1}$ est obtenu en rajoutant à $\mathcal{D}_n$ les milieux des points de $\mathcal{D}_n$ (qui sont au nombre de $2^n$, d'où un total de $(2^n + 1) + 2^n = 2^{n+1} + 1$).

Nous allons construire (par récurrence) une famille dénombrable d'ouverts $U(r)$ indexée par les nombres dyadiques de $[0, 1]$ qui va vérifier les deux propriétés suivantes :

1. Pour tout $r \in \mathcal{D}$, $\quad K \subset U(r) \subset V_0$ ;
2. Pour tout. $r, s \in \mathcal{D}$,,
$$r < s \Longrightarrow \overline{U(s)} \subset U(r).$$

En particulier, on voit que la famille des ouverts $U(r)$ est décroissante (par rapport à l'ordre des réels pour les indices et l'inclusion des ensembles).

Supposons avoir construit une telle famille d'ouvert $(U(r))_{r \in \mathcal{D}}$, et terminons la preuve du Lemme.

Posons, pour tout $x \in X$ : $f(x) = 0$ si $x \notin \cup_{r \in \mathcal{D}} U(r) = U(0)$ et pour $x \in U(0)$,

$$f(x) = \sup\{r \in \mathcal{D}\,;\ \ x \in U(r)\} > 0.$$

On remarque que par construction $f$ est à valeurs dans $[0,1]$. Comme

$$K \subset \bigcap_{r \in \mathcal{D}} U(r) = U(1) \subset U(0) = \bigcup_{r \in} U(r) \subset V_0$$

on voit qu'on a $f = 1$ sur $K$ on voit que $f = 0$ sur le complémentaire de $V_0$. On continue en remarquant que

$$f = \sup_{r \in \mathcal{D}'} r\, 1_{U(r)}.$$

(Seul le cas où le sup vaut 0 est à étudier). Ainsi, $f$ est semi-continue inférieurement. Montrons pour conclure que $f$ est semi-continue supérieurement. Il suffit d'étudier $\{f < \alpha\}$ pour $\alpha \in ]0,1]$. Soit $x \in X$ tel que $0 \leq f(x) < \alpha$. On cherche un voisinage de $x$ sur lequel $f$ reste inférieur strictement à $\alpha$. Par densité des nombres dyadiques, il existe $r \in \mathcal{D}$ tel que $f(x) < r < \alpha$. On peut se persuader que, comme souvent, il est utile d'avoir un deuxième dyadique "de sécurité" : soit $r' \in \mathcal{D}$ tel que $f(x) < r < r' < \alpha$. Soit $U = X \setminus \overline{U(r')}$. C'est un ouvert contenant $x$ car $f(x) < r$ entraine que $x \notin U(r)$ et donc $x \notin \overline{U(r')}$. Par ailleurs, si $y \notin \overline{U}(r')$, alors $y \notin U(r)$ et donc $f(y) \leq r' < \alpha$, d'où le résultat.

Il reste à construire la famille dénombrable ordonnée des ouverts $U(r)$ vérifiant les points 1. et 2. cidessus. C'est ici que le choix de la paramétrisation par $\mathcal{D}$ est sympathique (le fait d'utiliser les dyadiques n'a pas été utilisé dans l'argument construisant $f$).

Tous les ouverts qu'on va construire vont être inclus dans $V_0$ ; il seront donc automatiquement relativement compacts. On commence par les indices dans $\mathcal{D}_0 = \{0,1\}$. On pose $U(0) = V(0)$ et en utilisant le théorème 0.46, on trouve un ouvert $U(1)$ tel que

$$K \subset U(1) \subset \overline{U(1)} \subset U(0) = \subset V_0.$$

Supposons avoir construit une famille $U(r)$ vérifiant ce qu'on l'on veut pour tous les $r \in \mathcal{D}_n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$ :

$$\forall r \in \mathcal{D}_n,\ K \subset U(r) \subset V_0 \quad \text{et} \quad \forall r, s \in \mathcal{D}_n :\ r < s \Rightarrow \overline{U(s)} \subset U(r). \tag{11}$$

Étendons la construction aux $r \in \mathcal{D}_{n+1}$. Soit $r \in \mathcal{D}_{n+1} \setminus \mathcal{D}_n$. Alors, $r = \frac{a+b}{2}$, avec $a, b \in \mathcal{D}_n$, soit $a = \frac{k}{2^n}$ et $b = \frac{k+1}{2^n}$ pour un certain $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. En utilisant le théorème 0.46 pour le compact $\overline{U(b)}$ et l'ouvert $U(a)$, on trouve un ouvert $U(r)$ tel que

$$\overline{U(b)} \subset U(r) \subset \overline{U(r)} \subset U(a).$$

Ainsi, on n'a fait qu'intercaler de nouveaux ouverts (ordonnés) entre ceux déjà construits qui étaient déjà ordonés. On laisse le lecteur se persuader que les $U(r)$, $r \in \mathcal{D}_{n+1}$ vérifient la propriété (11) avec $n+1$ à la place de $n$. On construit ainsi par récurrence sur $n$ notre famille d'ouverts $(U(r))_{r \in \mathcal{D}}$.

Ceci achève la preuve du lemme d'Urysohn. $\square$

On va maintenant utiliser le lemme d'Urysohn pour construire une partition continue de l'unité.

**Théorème 0.56.** *Soient $V_1, \cdots, V_n$ des ouverts de $X$ un espace de Hausdorff localement compact et $K$ un compact tel que $K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Alors, pour $1 \leq i \leq n$, il existe $f_i \prec V_i$ telles que $K \prec f_1 + f_2 + \cdots + f_n$.*

*Démonstration.* Par le théorème 0.46, tout point $x \in K$ est contenu dans un ouvert $W_x$ relativement compact d'adhérence contenue dans l'un des $(V_i)_{1\leq i \leq n}$. On peut donc recouvrir $K$ par un nombre fini de ces ouverts $K \subset W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_m}$. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $F_i = \bigcup_{\substack{1\leq j\leq m \\ \overline{W_{x_j}} \subset V_i}} \overline{W_{x_j}}$ qui est compact. Le lemme d'Urysohn nous donne alors $g_i \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $\mathbf{1}_{F_i} \leq g_i \leq \mathbf{1}_{F'_i}$ où $F'_i$ est un compact de $V_i$. On pose

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1, \\ f_2 &= (1-g_1)g_2, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ f_n &= (1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_{n-1})g_n. \end{aligned} \tag{12}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, on a $f_i \in \mathcal{C}_c(X)$ et $0 \leq f_i \leq \mathbf{1}_{F'_i}$. D'autre part,

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = 1 - (1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n).$$

Or comme $K \subset F_1 \cup \cdots \cup F_n$, $(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n)$ s'annule sur $K$ ; ainsi $\mathbf{1}_K \leq f_1 + f_2 + \cdots .f_n$. Ceci complète la preuve du théorème 0.56. □

ib