Chapitre 1

Théorème de représentation de Riesz

Le théorème de représentation de Riesz fournit une manière d'obtenir des mesures (*positives*) à partir de formes linéaires *positives* sur l'espace des fonctions continues à support compact.

1.1 Théorème de représentation de Riesz pour les mesures positives sur un espace localement compact

Soit X un espace de Hausdorff localement compact et ν une mesure sur les boréliens de X pour laquelle les compacts sont de mesure finie. Alors les fonctions continues à support compact sont intégrables, i.e. $\mathcal{C}_c(X) \subset L^1(\nu)$, et on peut définir

$$\Lambda_\nu(f) := \int f\, d\nu, \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(X).$$

Cela définit une application linéaire sur $\mathcal{C}_c(X)$, 'représentée' par ν, qui a la propriété que $\Lambda_\nu(f) \geq 0$ si $f \geq 0$. Notons également que

$$\left|\Lambda_\nu(f)\right| \leq \mu(\mathrm{supp}(f))\, \|f\|_\infty$$

et donc que l'on a une bonne notion de "continuité" lorsqu'on travaille avec des fonctions ayant toutes leur support dans un compact fixé.

Le théorème de Riesz-Markov-Kakutani ci-dessous concerne la réciproque, et établit en plus des propriétés de "régularité" pour les mesures sur les boréliens.

Théorème 1.1 (Théorème de représentation de Riesz-Markov-Kakutani)**.** *Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Soit Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$ (i.e. pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, si $f \geq 0$ alors $\Lambda f \geq 0$). Alors, il existe $\mathcal{S}$ une σ-algèbre sur X contenant les boréliens de X et une unique mesure positive μ sur $\mathcal{S}$ telle que*

1. *pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, $\Lambda f = \displaystyle\int_X f(x) d\mu(x)$;*
2. *si $K \subset X$ est compact alors $\mu(K) < +\infty$;*
3. *pour $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}$;*
4. *si E est ouvert ou si $E \in \mathcal{S}$ tel que $\mu(E) < +\infty$ alors $\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact}\}$;*
5. *si $E \in \mathcal{S}$, $A \subset E$ et $\mu(E) = 0$ alors $A \in \mathcal{S}$.*

La propriété 1 qui relie la mesure à la forme linéaire est bien sûre celle qui présente le plus grand intérêt. Elle caractérise la mesure μ. On verra plus loin que les propriétés 2, 3 et 4 sont reliées ; dans des espaces “raisonnables”, 3 et 4 (en fait une version plus forte au sens où elle est vraie pour tout $E \in \mathcal{S}$) sont des conséquences de 2 (voir plus loin). La propriété 5 dit simplement que la mesure est complète (on sait que l'on peut toujours compléter un mesure).

Remarque 1.2. *Lorsque $(X, \mathcal{S}, \mu)$ est σ-fini, alors $\mathcal{S}$ est nécessairement exactement égale à la tribu borélienne complétée (pour μ),*

$$\mathcal{S} = \overline{\mathcal{B}(X)} := \mathcal{B}(X) \cup \{A \subset X \; ; \; \exists B \in \mathcal{B}(X), \; \mu(B) = 0, \; A \subset B\},$$

soit encore les parties qui s'écrivent comme réunion (disjointe si je veux) d'un borélien et d'un ensemble inclus dans un borélien de mesure nulle.

En effet, prenons d'abord $E \in \mathcal{S}$ avec $\mu(S) < +\infty$. Alors, par les propriétés 3. et 4., on peut trouver une réunion dénombrable de compacts F et une intersection dénombrable d'ouverts G avec

$$F \subset E \subset G \quad \text{et} \quad \mu(G \setminus F) = 0.$$

Mais alors

$$E = F \cup (E \setminus F) \quad \text{et} \quad E \setminus F \subset G \setminus F \text{ qui est un borélien (et même mieux...) de mesure nulle.}$$

Si $\mu(E) = +\infty$, on écrit $E = \bigcup_n E \cap A_n$ avec $A_n \in \mathcal{A}$ de mesure finie, et on applique le résultat précédent à $E \cap A_n$ qui est de mesure finie (par monotonie). Ainsi, on écrit $E \cap A_n = B_n \cup C_n$ avec B_n borélien et C_n inclus dans un borélien D_n de mesure nulle. Alors $E = B \cup D$ avec $B = \cup_n B_n$ borélien et D inclus dans $\cup_n D_n$ qui est un borélien de mesure nulle.

Un autre théorème de représentation de Riesz bien connu est celui sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui dit que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$ est représentée par un vecteur de $\mathcal{H}$ i.e. $\Lambda f = \langle v, f\rangle$ pour un unique $v \in \mathcal{H}$. Dans ce cadre, le fait que Λ est continue est une hypothèse cruciale. À première vue, il n'y a pas d'hypothèse de continuité dans le théorème 1.1. En fait, la continuité mentionnée en début de section découle de la positivité. Remarquons d'abord que pour $f, g \in \mathcal{C}_c(X)$ tels que $f \leq g$, on a $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$.

Fait 1.3. *Soit Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$. Alors, si K est un compact de X, il existe une constante $C_K > 0$ telle que pour toute fonction f continue sur X à support dans K on a*

$$|\Lambda(f)| \leq C_K \|f\|_\infty.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer ceci pour f à valeur réelles, le cas général découlant de la linéarité et de la séparation en parties réelle et imaginaire. Ensuite, on se donne une fonction $g \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $g_{|K} = 1$ par le lemme d'Urysohn ; alors, pour f à valeurs réelles, les fonctions $g \times (\|f\|_\infty \pm f)$ sont continues à support compact et positives. Comme Λ est linéaire et positive, on a

$$0 \leq \|f\|_\infty \Lambda g \pm \Lambda(gf) = \|f\|_\infty \Lambda g \pm \Lambda f$$

car $gf = f$. Ainsi $|\Lambda f| \leq C_K \|f\|_\infty$ pour $C_K := \Lambda g \geq 0$. $\square$

Nous allons maintenant passer à la preuve du théorème.

Preuve du théorème de représentation. Commençons par montrer l'unicité. En vertu de 3 et 4, les valeurs de μ sur les compacts la déterminent entièrement. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures vérifiant le théorème 1.1. Soit $K \subset X$ compact et $\varepsilon > 0$. Par 2 et 3, il existe un ouvert V tel que $K \subset V$ et $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $K \prec f \prec V$. Ainsi, puisque $1_K \leq f \leq 1_V$,

$$\mu_1(K) \leq \int_X f d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f d\mu_2 \leq \mu_2(V) \leq \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. En échangeant les rôles de μ_1 et μ_2, on obtient $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ pour tout K compact, soit encore, $\mu_1 = \mu_2$ par les remarques faites en début de preuve.

Construction de $\mathcal{S}$ et μ. Pour V ouvert de X, on définit

$$\boxed{\mu(V) := \sup\left\{\Lambda f\ ;\ f \in \mathcal{C}_c(X) \text{ avec } f \prec V\right\}} \tag{1.1}$$

L'idée est, bien entendu, que le sup est obtenu lorsque f se rapproche de 1_V (qui a le mauvais gout de ne pas être continue, en général). Remarquons que $\mu(\emptyset) = 0$. On a aussi clairement que si $V_1 \subset V_2$ ouverts, $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$. Ainsi, si E est ouvert dans X, on a

$$\boxed{\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}} \tag{1.2}$$

Pour tout $E \subset X$, on définit $\mu(E)$ par (1.2).

Remarque 1.4. *On définit μ sur toutes les parties de X. Pour garantir que μ est σ-additive, on va se restreindre à une σ-algèbre plus petite.*

Soit $\mathcal{S}_F$ l'ensemble des parties E de X telles que $\mu(E) < +\infty$ et

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact}\}. \tag{1.3}$$

Soit $\mathcal{S}$ la famille des parties donnée par

$$\mathcal{S} = \{E \subset X\ ;\ E \cap K \in \mathcal{S}_F \text{ pour tout } K \text{ compact de } X\big\}.$$

On va montrer, lentement mais surement, que μ et $\mathcal{S}$ ont les propriétés annoncées. Il sera plus facile de montrer que $\mathcal{S}_F$ a de bonnes priorités. A priori, on ne voit pas de lien évident entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_F$; à la toute fin, on verra que ces classes d'ensembles sont intimement liées.
Danger : se laisser entrainer par les notations et faire comme si μ etait une mesure... On ne le saura qu'à la toute fin.

Clairement μ est monotone :

$$\forall A, B \subset X, \qquad A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$

En particulier, si $\mu(E) = 0$ alors $E \in \mathcal{S}_F$ et $E \in \mathcal{S}$. Nous avons déjà signalé que la positivité et la linéarité de Λ entraîne que si f et g dans $\mathcal{C}_c(X)$ vérifie $f \leq g$ alors $\Lambda f \leq \Lambda g$.

Lemme 1.5. *Soient $(E_i)_{i\geq 1}$ des parties de X. Alors* $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(E_i)$.

Démonstration. Si $\mu(E_i) = +\infty$ pour l'un des i, alors la conclusion du lemme 1.5 est trivialement vraie. On les supposera donc tous les $(\mu(E_i))_{i\geq 1}$ finis.

Montrons d'abord que $\mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2)$ si E_1 et E_2 sont ouverts. Choisissons g telle que $g \prec E_1 \cup E_2$. Alors par le théorème 0.56, avec $K = \mathrm{supp}(g) \subset E_1 \cup E_2$, pour $i \in \{1, 2\}$, on construit $f_i \prec E_i$ et telles que $f_1 + f_2 = 1$ sur le support de g. Ainsi $g = gf_1 + gf_2$ et

$$\Lambda g = \Lambda(gf_1) + \Lambda(gf_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2).$$

En prenant le supremum de cette inégalité sur l'ensemble des $g \prec E_1 \cup E_2$, par (1.1), on obtient $\mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par (1.2), pour tout $i \geq 1$, il existe V_i ouvert contenant E_i tel que $\mu(V_i) < \mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon$. Soit $V = \bigcup_{i\geq 1} V_i$. Choisissons $f \prec V$. Comme f est de support compact, il existe $n \geq 1$ tel que $f \prec V_1 \cup \cdots \cup V_n$. En appliquant l'inégalité pour deux ouverts (par récurrence), on calcule

$$\Lambda f \leq \mu(V_1 \cup \cdots \cup V_n) \leq \mu(V_1) + \cdots + \mu(V_n) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $f \prec V$ et comme $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \subset V$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \leq \mu(V) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci achève la preuve du lemme 1.5. $\square$

Lemme 1.6. *Si K est compact, alors $K \in \mathcal{S}_F$ et $\mu(K) = \inf_{K\prec f} \Lambda f$.*

Le point 2 ($\mu(K) < \infty$) du théorème 1.1 est une conséquence immédiate de ce lemme.

Démonstration. On va commencer par montrer que pour $K \prec f$ on a $\mu(K) \leq \Lambda(f)$ ce qui montrera que $\mu(K)$ est fini (et donc que $K \in \mathcal{S}_F$, puisque (1.3) est clairement vraie pour $E = K$ par monotonie) ainsi qu'un sens de l'inégalité. Pour $\alpha \in]0,1[$, on définit l'ouvert $V_\alpha := \{x \in X; f(x) > \alpha\}$. Ainsi, $K \subset V_\alpha$ et $\alpha\, g \leq f$ si $g \prec V_\alpha$. Donc,

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) = \sup_{g\prec V_\alpha} \Lambda g \leq \frac{1}{\alpha}\Lambda f.$$

En laissant tendre α vers 1^-, on obtient

$$\mu(K) \leq \Lambda f \text{ si } K \prec f. \tag{1.4}$$

Pour l'autre sens, on se donne $\varepsilon > 0$. Il existe, par définition, un ouvert $V \supset K$ tel que $\mu(V) \leq \mu(K)+\varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn (le théorème 0.55), on construit f telle que $K \prec f \prec V$. Ainsi $\Lambda f \leq \mu(V) \leq \mu(K)+\varepsilon$. En laissant ε tendre vers 0^+, on obtient $\inf_{K\prec f} \Lambda f \leq \mu(K)$ ce qui complète la preuve du lemme 1.6. $\square$

Lemme 1.7. *Pour tout E ouvert de X on a la propriété (1.3). En particulier, $\mathcal{S}_F$ contient tous les ouverts sur lesquels μ est finie.*

Démonstration. Soit E ouvert et $\alpha < \mu(E)$. Alors il existe $f \prec E$ tel que $\alpha < \Lambda f$. Soit K le support de f (qui est donc inclus dans E). Si U est ouvert contenant K, alors $f \prec U$, et donc $\Lambda f \leq \mu(U)$. Ainsi $\Lambda f \leq \mu(K)$. On trouve ainsi un compact $K \subset E$ tel que $\alpha < \mu(K)$. Ceci nous donne (1.3). $\square$

Lemme 1.8. *Supposons que $E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$ où pour tout $i \geq 1$, $E_i \in \mathcal{S}_F$ et pour tout $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$. Alors*

$$\mu(E) = \sum_{i\geq 1} \mu(E_i). \tag{1.5}$$

Si, de plus, $\mu(E) < +\infty$, alors $E \in \mathcal{S}_F$.

Démonstration. Montrons d'abord que si K_1 et K_2 sont des compacts disjoints alors

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2). \tag{1.6}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $f \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $f_{|K_1} = 1$, $f_{|K_2} = 0$ et $0 \leq f \leq 1$. Par le lemme 1.6, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $K_1 \cup K_2 \prec g$ et $\Lambda g \leq \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$. On remarque que $K_1 \prec fg$ et $K_2 \prec (1-f)g$. Comme Λ est linéaire, de (1.4), on tire

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \Lambda(fg) + \Lambda((1-f)g) = \Lambda g \leq \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a démontré (1.6).
Si $\mu(E) = +\infty$ alors l'égalité souhaitée découle du lemme 1.5. Soit $\varepsilon > 0$ et supposons que $\mu(E) < +\infty$ donc $E_i \in \mathcal{S}_F$ pour tout i. Pour tout i, il existe donc $H_i \subset E_i$ compact tel que

$$\mu(H_i) > \mu(E_i) - 2^{-i}\varepsilon. \tag{1.7}$$

Posant $K_n = H_1 \cup \cdots \cup H_n$, de (1.6), on tire

$$\mu(E) \geq \mu(K_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i) > \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \varepsilon. \tag{1.8}$$

Ceci étant vrai pour tout n et tout $\varepsilon > 0$, en se souvenant du lemme 1.5, on obtient (1.5).
Montrons enfin que E vérifie (1.3) (et donc que $E \in \mathcal{S}_F$) si $\mu(E) < +\infty$. Pour $\varepsilon > 0$, par (1.5), il existe $N > 0$ tel que

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) + \varepsilon. \tag{1.9}$$

Donc, par (1.8), on a $\mu(E) \leq \mu(K_N) + 2\varepsilon$ ce qui prouve que E vérifie (1.3). Ainsi $E \in \mathcal{S}_F$. □

Lemme 1.9. *Si $E \in \mathcal{S}_F$ et $\varepsilon > 0$, il existe K compact et V ouvert tel que $K \subset E \subset V$ et $\mu(V \setminus K) \leq \varepsilon$.*

Démonstration. D'après nos définitions, on sait qu'il existe $K \subset E$ et $V \supset E$ tels que $\mu(V) - \varepsilon/2 < \mu(E) < \mu(K) + \varepsilon/2$. Comme $V \setminus K$ est ouvert, il est dans $\mathcal{S}_F$ par le lemme 1.7. Alors le lemme 1.8 nous dit que

$$\mu(K) + \mu(V \setminus K) = \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon.$$

Ceci démontre le lemme 1.9. □

Lemme 1.10. *Si $(A_1, A_2) \in \mathcal{S}_F \times \mathcal{S}_F$ alors $A_1 \setminus A_2$, $A_1 \cup A_2$ et $A_1 \cap A_2$ sont dans $\mathcal{S}_F$.*

Notez que comme les compacts sont inclus dans $\mathcal{S}_F$, la stabilité par intersection montre que $\mathcal{S}_F \subset \mathcal{S}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$; par le lemme 1.9, il existe $(K_i)_{i\in\{1,2\}}$ compacts et $(V_i)_{i\in\{1,2\}}$ ouverts tel que $K_i \subset A_i \subset V_i$ et $\mu(V_i \setminus K_i) < \varepsilon$ pour $i \in \{1, 2\}$. Comme

$$A_1 \setminus A_2 \subset V_1 \setminus K_2 \subset (V_1 \setminus K_1) \cup (K_1 \setminus V_2) \cup (V_2 \setminus K_2),$$

le lemme 1.5 montre que

$$\mu(A_1 \setminus A_2) \leq 2\varepsilon + \mu(K_1 \setminus V_2).$$

Or $K_1 \setminus V_2$ est un compact de $A_1 \setminus A_2$, ceci prouve de $A_1 \setminus A_2$ satisfait (1.3) et, ainsi, $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{S}_F$.
Comme $A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup A_2$, on applique le lemme 1.8 pour obtenir que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{S}_F$. Enfin, comme $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)$, on a aussi que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{S}_F$. □

Lemme 1.11. *$\mathcal{S}$ est une σ-algèbre contenant tous les boréliens de X.*

Démonstration. Dans toute la preuve, K est un compact de X. Si $A \in \mathcal{S}$ alors $A^c \cap K = K \setminus (A \cap K)$; $A^c \cap K$ est donc élément de $\mathcal{S}_F$ comme différence de deux éléments de $\mathcal{S}_F$. Ainsi $A^c \in \mathcal{S}$.
Supposons que $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ où $A_i \in \mathcal{S}$. Posons $B_1 = A_1 \cap K$ et

$$B_n = (A_n \cap K) \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}) \quad \text{pour} \quad n \geq 2.$$

Alors, par le lemme 1.10, les $(B_i)_{i \geq 1}$ sont des éléments de $\mathcal{S}_F$ deux à deux disjoints et $A \cap K = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i$. Ainsi $A \cap K \in \mathcal{S}_F$ par le lemme 1.8 et $A \in \mathcal{S}$.

Enfin, si F est fermé dans X alors $F \cap K$ est compact donc élément de $\mathcal{S}_F$. Donc $F \in \mathcal{S}$. En particulier $X \in \mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{S}$ est une σ-algèbre contenant tous les fermés de X ; elle contient donc la σ-algèbre engendrée par ces fermés c'est-à-dire la σ-algèbre des boréliens de X. Ceci achève la preuve du lemme 1.11. $\square$

Lemme 1.12. *$\mathcal{S}_F$ est l'ensemble des éléments E de $\mathcal{S}$ tels que $\mu(E) < +\infty$.*

Ceci nous donne le point 4 du théorème 1.1.

Démonstration. On a déjà vu que $\mathcal{S}_F \subset \mathcal{S}$. Pour la réciproque, donnons-nous $E \in \mathcal{S}$ tel que $\mu(E) < +\infty$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $V \supset E$ ouvert tel que $\mu(V) < +\infty$; Par les lemmes 1.7 et 1.8, il existe $K \subset V$ compact tel que $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. Comme $E \cap K \in \mathcal{S}_F$, il existe $H \subset E \cap K$ compact tel que

$$\mu(E \cap K) < \mu(H) + \varepsilon.$$

De l'inclusion $E \subset (E \cap K) \cup (V \setminus K)$, on tire

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V \setminus K) \leq \mu(H) + 2\varepsilon.$$

Ainsi $E \in \mathcal{S}_F$. $\square$

Comme conséquence des lemmes 1.8, 1.11 et 1.12, on obtient le

Lemme 1.13. *μ définit une mesure sur $\mathcal{S}$.*

Enfin, pour achever la démonstration du théorème de représentation de Riesz, il nous suffit de démontrer le

Lemme 1.14. *Pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, on a $\Lambda f = \int_X f d\mu$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer l'égalité pour f à valeurs réelles (par linéarité des deux membres de l'égalité). En fait, en échangeant f avec $-f$, on voit qu'il suffit de démontrer, pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles, l'inégalité

$$\Lambda f \leq \int_X f d\mu. \tag{1.10}$$

Soit K le support de $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles. Soit $[a, b]$ un intervalle contenant l'image de f (qui est compacte car $f \in \mathcal{C}_c(X)$). Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que $\max_{1 \leq i \leq n} (y_i - y_{i-1}) \leq \varepsilon$ et

$$y_0 < a < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = b. \tag{1.11}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, posons

$$E_i = \{x;\ y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K. \tag{1.12}$$

Étant continue, f est Borel mesurable ; les ensembles $(E_i)_{1\le i\le n}$ sont donc des boréliens disjoints dont la réunion vaut K. Pour $1 \le i \le n$, on peut trouver (par continuité et définition de μ) un ouvert $V_i \supset E_i$ tel que $f_{|V_i} < y_i + \varepsilon$ et

$$\mu(V_i) \le \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}. \tag{1.13}$$

Par le théorème 0.56, on construit, pour $1 \le i \le n$, $h_i \prec V_i$ telles que $h_1 + \cdots + h_n = 1$ sur K. Ainsi $f = h_1 f + \cdots + h_n f$ et le lemme 1.6 nous dit que

$$\mu(K) \le \Lambda\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) = \sum_{i=1}^n \Lambda h_i.$$

Comme $h_i f \le (y_i + \varepsilon)h_i$ et $y_i - \varepsilon \le f$ sur E_i, on calcule

$$\begin{aligned}
\Lambda f = \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i f) &\le \sum_{i=1}^n (y_i+\varepsilon)\Lambda h_i = \sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\varepsilon)\Lambda h_i - |a|\sum_{i=1}^n \Lambda h_i \\
&\le \sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\varepsilon)(\mu(E_i)+\frac{\varepsilon}{n}) - |a|\mu(K) = \sum_{i=1}^n y_i\mu(E_i) + \varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\varepsilon) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i-\varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\varepsilon) \\
&\le \int_X f\,d\mu + \varepsilon(2\mu(K)+|a|+b+\varepsilon).
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, la preuve de (1.10) est complète. □

Ceci achève la preuve du théorème 1.1. □

1.2 Théorème de représentation de Riesz et mesures boréliennes positives sur les bons espaces topologiques

On rappelle qu'une mesure borélienne ou une mesure de Borel (positives) sur un espace topologique X désigne une mesure (positive) sur les boréliens $\mathcal{B}(X)$ de X.

Définition 1.15. Soit X un espace topologique et μ une mesure sur les boréliens de X.

1. On dit qu'elle est intérieurement régulière si
$$\forall E \in \mathcal{B}, \quad \mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact }\}.$$
2. On dit qu'elle est extérieurement régulière si
$$\forall E \in \mathcal{B}, \quad \mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V \text{ ouvert }\}.$$
3. On dit qu'elle est régulière si elle est intérieurement régulière et extérieurement régulière

On rappelle qu'un sous-ensemble E d'un espace topologique est dit σ-compact s'il est la réunion dénombrable de compacts ; on dit aussi qu'il est K_σ (le K faisant référence à compact)

Un sous-ensemble E d'un espace topologique est appelé G_δ s'il est intersection dénombrable d'ouverts. Un sous-ensemble E d'un espace topologique est appelé F_σ s'il est réunion dénombrable de fermés ; c'est un K_σ si ces fermés sont de plus compacts.

Commençons par remarquer que la régularité de la mesure permet de mieux comprendre comment mesurer les ensembles.

Proposition 1.16. *Soit μ une mesure borélienne régulière sur $(X, \mathcal{B}(X))$.*
(En réalité, on pourra seulement supposer qu'on a la régularité sur les ensembles de mesure finie, i.e. qu'on a les propriétés 1. *et* 2. *ci-desus pour les boréliens B vérfiant $\mu(B) < \infty$).*

(i) Pour tout borélien E de mesure finie et tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K et un ouvert U tel que $K \subset E \subset U$ et $\mu(U \setminus K) \leq \epsilon$.

(ii) Si (X, μ) est σ-fini, alors pour tout borélien E et tout $\epsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert U tel que $F \subset E \subset U$ et $\mu(U \setminus F) \leq \epsilon$;
En particulier, il existe des ensembles A et B tels que A est un F_σ, B un G_δ, $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$.

Démonstration. La première propriété découle directement de la définition (elle a été déjà été évoquée dans la preuve de Riesz).

Pour la deuxième, supposons que $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$ où $(A_i)_{i \geq 1}$ sont des boréliens de mesure finie. Pour un borélien E de X et $\varepsilon > 0$ alors, pour $n \geq 1$, $\mu(A_n \cap E) < +\infty$ et par le (ii) il existe V_n ouvert tel que $V_n \supset A_n \cap E$ et

$$\mu(V_n \setminus (A_n \cap E)) \leq 2^{-n-1}\varepsilon.$$

Si $V = \bigcup_{n \geq 1} V_n$ alors $V \setminus E \subset \bigcup_{n \geq 1} (V_n \setminus (A_n \cap E))$ ainsi

$$\mu(V \setminus E) < \varepsilon/2. \tag{1.14}$$

De même pour le complémentaire E^c, on peut trouver un ouvert $W \supset E^c$ tel que $\mu(W \setminus E^c) < \varepsilon/2$. On pose alors $F = W^c$. On a $F \subset E$ et $E \setminus F = W \setminus E^c$.

Enfin, pour $j \geq 1$, on peut ainsi trouver F_j fermé et V_j ouvert tels que $F_j \subset E \subset V_j$ et $\mu(V_j \setminus F_j) < 1/j$. Posons $A = \cup_j F_j$ et $B = \cap_j V_j$. Alors A est un F_σ, B un G_δ et $\mu(B \setminus A) = 0$ car $\mu(B \setminus A) \leq \mu(V_j \setminus F_j) < 1/j$, ceci pour tout $j \geq 1$. □

La mesure construite dans le Théorème 1.1 n'est pas forcément régulière dans le sens défini ci-dessus : elle est extérieurement régulière mais la régularité intérieure n'est vraie que sur des ensembles spéciaux. Cela ne peut être amélioré sans hypothèse supplémentaire (voir [6, Chapitre 2, exercice 17]). On va maintenant voir qu'avec un un léger renforcement des hypothèses, ce problème disparaît. De plus, le résultat d'unicité sera plus général et plus utile.

Définition 1.17. Un espace topologique X sera dit K*-régulier* s'il est séparé, localement compact, et si tout ouvert de X est σ-compact (i.e. réunion dénombrable de compact).

Cette définition est interne à ce cours, car elle n'est pas standard (on a hésité avec "bon espace topologique" ; ici le K évoque "compact"). Notons qu'un espace K-régulier X est nécessairement σ-compact.

Comme exemples (à traiter à titre d'exercice) importants d'espaces topologiques K-réguliers on a :
— Les espaces métriques compacts ;
— les espaces vectoriels normés de dimension finie (muni de la topologie de la norme).

On rappelle que si μ est une mesure borélienne finie sur les compacts, l'application $f \to \Lambda_\mu(f) = \int f \, d\mu$ définit une application linéaire sur $\mathcal{C}_c(X)$. Lorsque X est K-régulier, on peut montrer que la mesure des ouvert est déterminée par Λ_μ.

Proposition 1.18. *Soit X un espace topologique K-régulier et μ est une mesure borélienne sur X finie sur les compacts. Alors pour tout ouvert V de X on a*

$$\mu(V) = \sup \left\{ \Lambda_\mu(f) \, ; \; f \in \mathcal{C}_c(X) \text{ } et \text{ } f \prec V \right\}.$$

Démonstration. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(X)$ vérifiant $f \prec V$, on a par hypothèse $\int f\, d\mu \leq \int 1_V\, d\mu = \mu(V)$, ce qui donne une inégalité.

Réciproquement, par hypothèse, il existe une suite de compacts K_n tel que $\cup K_n = V$. Par le Lemme d'Uryshon je peux trouver des fonctions $f_n \in \mathcal{C}_c(X)$ tel que $K_n \prec f \prec V$, et donc en particulier $1_{K_n} \leq f_n \leq 1_V$. On modifie la suite de fonctions pour qu'elle soit croissante, en posant

$$g_n = \max\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}.$$

Alors on a toujours $g_n \in \mathcal{C}_c(X)$ et $1_{K_n} \leq g_n \leq 1_V$. Cela montre que g_n tend (simplement) en croissant vers 1_V (OK ?). Ainsi, par convergence monotone on a

$$\int g_n\, d\mu \to \mu(V).$$

□

On va utiliser ce résultat pour obtenir la variante suivante du théorème de Riesz :

Théorème 1.19. *Soit X un espace topologique K-régulier et $\Lambda : \mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{C}$ une application linéaire positive. Alors il existe une, et une seule, mesure μ sur les boréliens de X qui est finie sur les compacts et qui vérifie $\Lambda = \Lambda_\mu$. De plus, cette unique mesure μ est régulière.*

Vous noterez la subtilité suivante : on a l'unicité de toute mesure μ (finie sur les compacts) représentant Λ, sans avoir besoin de supposer la régularité.

Démonstration. Il est courant de montrer l'unicité avant, mais ici comme dans la démonstration précédente de Riesz, on utilise l'existence pour montrer l'unicité. Par le Théorème de Riesz, il existe une mesure μ_0 satisfaisant propriétés (1)-(5) du théorème 1.1. En particulier, elle représente Λ et vérifie les propriétés (1)-(5) sur $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{S}$.

Commençons par remarquer que μ_0 est régulière. Pour cela, il reste à montrer que la régularité intérieure n'est pas seulement valable sur les boréliens de mesures finie, mais aussi pour tous les boréliens. Comme X est σ-compact, on peut trouver une suite croissante (puisqu'une réunion finie de compact est compact) K_n avec $\cup K_n = X$. Soit E un borélien, qui est donc réunion croissante des $E \cap K_n$, d'où $\mu_0(E \cap K_n) \to \mu(E) \in [0, +\infty]$. Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, comme $\mu_0(E \cap K_n) < \infty$, on peut trouver par régularité intérieure un compact $L_n \subset E \cap K_N \subset E$ avec $\mu_0(E \cap K_n) - \frac{1}{n} \leq \mu(L_n) \leq \mu_0(E \cap K_n)$. On a alors, par encadrement $\mu_0(L_n) \to \mu_0(E)$, avec L_n qui est un compact inclus dans E, ce qui montre la régularité intérieure.

Soit maintenant μ une autre mesure sur $\mathcal{B}(X)$ qui est finie sur les compacts et qui représente aussi Λ. Par la Proposition 1.18 précédente, on en déduit que $\mu(V) = \mu_0(V)$ pour tout ouvert V. Soit E un borélien de X et $\varepsilon > 0$. Par régularité de μ_0, on a, comme dans la Proposition 1.16, l'existence d'un F fermé et d'un V ouvert tels que

$$F \subset E \subset V \quad \text{et} \quad \mu_0(V \setminus F) < \varepsilon.$$

On a $\mu(V) = \mu_0(V)$, mais aussi comme $V \setminus F$ est ouvert, on a $\mu(V \setminus F) = \mu_0(V \setminus F) \leq \varepsilon$. Cela permet facilement de conclure que $\mu(E) = \mu_0(E)$. En effet, si $\mu_0(E) = +\infty$ on a $\mu(V) = +\infty$ d'où on en tire que $\mu(E)$ ne peut pas être fini, puisque $\mu(V \setminus E) \leq \mu(V \setminus F) \leq \varepsilon$. Si $\mu_0(E) < \infty$, le même argument montrer que $\mu(E) < \infty$, et alors on peut écrire

$$\mu_0(E) \leq \mu_0(V) = \mu(V) \leq \mu(E) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu(E) \leq \mu(V) = \lambda(V) \leq \mu_0(E) + \varepsilon$$

ainsi $|\mu_0(E) - \mu(E)| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\mu_0(E) = \mu(E)$.

Cela montre la démonstration de l'unicité (et donc de la régularité, puisque $\mu = \mu_0$ est régulière).

□

Le théorème précédent permet de garantir la régularité des mesures boréliennes sur les bons espaces. En effet, si μ est une mesure boréliennes sur un espace K-régulier X qui est finie sur les compact, on peut introduire Λ_μ et μ est la seule mesure sur $\mathcal{B}(X)$ pouvant représenter Λ_μ. Ainsi :

Théorème 1.20. *Soit X un espace topologique K-régulier et μ une mesure borélienne finie sur les compacts. Alors μ est régulière sur $\mathcal{B}(X)$.*

1.3 La mesure de Lebesgue

Il y a deux manières d'utiliser les résultats précédents.

— Soit on a déjà construit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ (typiquement à partir du théorème de Carathéodory). Dans ce cas, comme $\mathbb{R}^d$ est un espace topologique régulier et la mesure de Lebesgue est finie sur les compacts (puisque tout compact est inclus dans un certain cube $[a,b]^d$), on en déduit que la mesure de Lebesgue est régulière sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (et aussi sur la tribu complétée, appelée tribu de Lebesgue).

— Soit on utilise le théorème de Riesz pour construire la mesure de Lebesgue (qui sera alors régulière par construction). Pour ce faire, l'idée est de commencer par définir l'intégrale de Riemann pour les fonctions continues à support compact, ce qui permet de définir une application linéaire positive Λ, et d'appliquer le théorème de Riesz pour étendre cela à une mesure borélienene.

Dans la suite, nous allons présenter ce deuxième point de vue, plus complet, qui donne donc une construction possible de la mesure de Lebesgue.

Définition 1.21. 1. On appelle *boîte* un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ de la forme $[a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times\cdots\times[a_d, b_d[$ (où $a_i \leq b_i$ pour $1 \leq i \leq d$).

2. Le point $(a_1, \cdots, a_d)$ est appelé le *coin* de la boîte.

3. Le *volume* de la boîte $B := [a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times\cdots\times[a_d, b_d[$ est le réel positif ou nul $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdot(b_d - a_d)$; il est noté $\mathrm{Vol}(B)$.

On construit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ par le

Théorème 1.22. *Il existe une unique mesure complète λ_d définie sur une σ-algèbre $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\lambda_d(B) = Vol(B)$ pour toute boîte B ;*
2. *la σ-algèbre $\mathcal{S}$ contient tous les boréliens ; plus précisément, $E \in \mathcal{S}$ si et seulement s'il existe des ensembles A et B tels que A est un F_σ, B un G_δ, $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$; de plus, λ_d est régulière ;*
3. *λ_d est invariante par translation i.e. si $E \in \mathcal{S}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, alors $x + E \in \mathcal{S}$ et $\lambda_d(x + E) = \lambda_d(E)$.*

De plus, λ_d vérifie

4. *si μ est une mesure borélienne positive sur $\mathbb{R}^d$ finie sur tout compact qui plus est invariante par translation, alors il existe $c \geq 0$ telle que $\mu = c \cdot \lambda_d$;*
5. *pour $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application linéaire, pour tout $E \in \mathcal{S}$, on a $T(E) \in \mathcal{S}$ et $\lambda(T(E)) = |det(T)|\,\lambda(E)$ (où $det(T)$ désigne le déterminant de l'application linéaire T).*

Démonstration. Commençons par consttruire un analogue multidimensionnel des sommes de Riemann. Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}_n = 2^{-n}\mathbb{Z}^d$ i.e. $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des points dont les coordonnées sont toutes des multiples entiers relatifs de 2^{-n}. Soit Ω_n la famille des 2^{-n}-boites dont les coins se trouvent en un point de $\mathcal{P}_n$. On vérifie facilement les trois propriétés suivantes de Ω_n :

1. pour n fixé, chaque point de $\mathbb{R}^d$ appartient à exactement une boîte de Ω_n ;
2. si $B \in \Omega_n$ et $B' \in \Omega_r$ et $r < n$ alors soit $B \subset B'$ soit $B \cap B' = \emptyset$;
3. si $B \in \Omega_r$ alors $\mathrm{vol}(B) = 2^{-rd}$ et si de plus $n > r$, B contient exactement $2^{(n-r)d}$ points de $\mathcal{P}_n$.

De plus les familles $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ vérifient

Lemme 1.23. *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ est une union disjointe dénombrable de boîtes dans $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots$.*

Démonstration. Soit V un ouvert. Clairement V est la réunion des boîtes contenues dans V et appartenant à l'un des Ω_n. De ces boîtes, on peut séparer celles appartenant à Ω_1 de celles appartenant à $\Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \cdots$; par la propriété 2, on peut choisir ces dernières boîtes de façon qu'elle ne rencontrent aucune des boîtes dans Ω_1. Puis, on considère les boîtes appartenant à Ω_2 que l'on sépare de celles appartenant à $\Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \cdots$; on peut encore appliquer la propriété 2 à ces dernières boites. En continuant cette procédure on obtient la décomposition souhaitée pour l'ouvert V. $\square$

Pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, on définit

$$\Lambda_n f = 2^{-nd} \sum_{x\in\mathcal{P}_n} f(x). \tag{1.15}$$

où $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des coins des cubes dans Ω_n. Comme f est à support compact, la somme dans (1.15) ne contient qu'un nombre fini de termes. Λ_n est linéaire et positive.

Montrons que $\Lambda_n f$ converge vers, disons, Λf qui sera donc linéaire et positive. On peut sans perte de généralité supposer que f est à valeurs réelles. Pour $x \in \mathcal{P}_n$, soit B_x^n l'unique boîte de Ω_n dont le coin est x. On définit

$$\Lambda_n^+ f = 2^{-nd} \sum_{x\in\mathcal{P}_n} \sup_{y\in B_x^n} f(y) \quad \text{et} \quad \Lambda_n^- f = 2^{-nd} \sum_{x\in\mathcal{P}_n} \inf_{y\in B_x^n} f(y).$$

Comme f est à support compact, ces sommes sont finies. Clairement, par la propriété 2 des boîtes de Ω_n, on a

$$\Lambda_n^- f \leq \Lambda_{n+1}^- f \quad \text{et} \quad \Lambda_{n+1}^+ f \leq \Lambda_n^+ f \quad \text{et} \quad \Lambda_n^- f \leq \Lambda_n f \leq \Lambda_n^+ f$$

Comme f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que, si $n \geq N$

$$\forall C \in \Omega_n, \quad 0 \leq \sup_C f - \inf_C f \leq \varepsilon$$

Si f est à support dans $[-k,k[^d$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$), on estime donc, pour $n \geq N$,

$$\Lambda_n^+ f - \Lambda_n^- f = 2^{-nd} \sum_{\substack{C\in\Omega_n \\ C\cap[-k,k[^d\neq\emptyset}} (\sup_C f - \inf_C f) \leq 2^{-nd}(2k)^d 2^{nd}\varepsilon = (2k)^d\varepsilon.$$

Les suites $(\Lambda_n^- f)_n$ et $(\Lambda_n^+ f)_n$ sont donc adjacentes. Ainsi la suite $(\Lambda_n f)_n$ converge vers une limite que l'on note Λf. Celle-ci est bien sûr linéaire et positive.

Remarque 1.24. *La somme $\Lambda_n f$ est une somme de Riemann pour f. Nous venons donc juste de construire l'intégrale de Riemann d'une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^d$.*

Le théorème 1.1 nous donne alors une σ-algèbre $\mathcal{S}$ et sur $\mathcal{S}$, une mesure λ_d représentant Λ. Vérifions qu'elle a les propriétés annoncées dans le théorème 1.22. Cette mesure est complète et le théorème 1.20 nous donne le point 2 du théorème 1.22.

Montrons 1. Soit B une boîte et E_n la réunion des boîtes de Ω_n dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de B. Soit f_n telle que $\overline{E_n} \prec f_n \prec \mathring{B}$. On pose $g_n = max(f_1, \cdots, f_n)$. On a alors que $g_n \nearrow \mathbf{1}_{\mathring{B}}$ ponctuellement quand $n \to +\infty$. Par la définition de Λ, on a

$$\mathrm{vol}(E_n) \le \Lambda f_n \le \Lambda g_n \le \mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(\mathring{B}).$$

Quand $n \to +\infty$, $\mathrm{vol}(E_n) \to \mathrm{vol}(B)$ et $\Lambda g_n = \displaystyle\int_X g_n d\lambda_d \nearrow \lambda_d(\mathring{B})$ par convergence croissante. Ainsi $\lambda_d(\mathring{B})$ =vol(B). Donc $\lambda_d(B) \ge \lambda_d(\mathring{B})$ =vol(B). De plus, pour $\varepsilon > 0$

$$\lambda_d(B) \le \lambda_d(\mathring{B} +]-\varepsilon, \varepsilon[^d) = \lambda_d(\overline{\mathring{B+]-\varepsilon,\varepsilon[^d}}) = \mathrm{vol}(\overline{\mathring{B+]-\varepsilon,\varepsilon[^d}}) = \mathrm{vol}(B) + O(\varepsilon). \tag{1.16}$$

En laissant $\varepsilon \to 0^+$, on obtient le point 1.
Pour prouver 3, 4 et 5, on observe que, si λ est une mesure de Borel positive sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\lambda(E) = \lambda_d(E)$ pour toute boite E alors cette égalité reste vraie pour tout E ouvert de $\mathbb{R}^d$ (par le lemme 1.23) et, donc, pour tout E borélien comme λ et λ_d sont régulières (par le théorème 1.20).
Pour montrer 3, on fixe $x \in \mathbb{R}^d$ et on définit $\lambda_x(E) := \lambda_d(E + x)$ pour E borélien. Clairement, λ_x est une mesure borélienne positive. Par le point 1, $\lambda_x(E) = \lambda_d(E)$ pour toute boîte, donc, pour tout borélien E, on a $\lambda_d(E) = \lambda_d(E + x)$. Enfin, par le point 2, cette égalité reste vraie sur $\mathcal{S}$.
Supposons que λ vérifie les hypothèses de 4. Pour $n \ge 1$, $[0,1[^d$ se partitionne de la façon suivante $[0,1[^d = \displaystyle\bigcup_{x \in \mathcal{P}_n \cap [0,1[^d} x + [0, 2^{-n}[^d$ où la réunion est disjointe. On en déduit que

$$2^{nd}\lambda([0, 2^{-n}[^d) = \lambda([0,1[^d) = c\,\lambda_d([0,1[^d) = c2^{nd}\lambda_d([0,2^{-n}[^d)$$

où $c := \lambda([0,1[^d)$. Donc, par invariance par translation, pour tout $Q \in \Omega_n$, $\lambda(Q) = c\,\lambda_d(Q)$. Le lemme 1.23 et la σ-additivité impliquent alors que pour tout ouvert E de $\mathbb{R}^d$, on a $\lambda(E) = c\,\lambda_d(E)$. Ceci prouve 4.
Démontrons 5. Commençons par le démontrer pour $T = U$ où U est une isométrie i.e. $U\,{}^tU = {}^t\,U\,U = 1$. L'application $E \mapsto \lambda_d(U(E))$ définit une mesure borélienne qui satisfait à toutes les conditions du point 4. Il existe donc une constante $c(U)$ telle que $\lambda_d(U(E)) = c(U)\lambda_d(E)$. Pour $E = B_2(0,1)$ la boule euclidienne centrée en 0 de rayon 1, on a bien sûr $U(E) = E$. Ainsi $c(U) = 1$.
Soit maintenant T linéaire sur $\mathbb{R}^d$. Si T n'est pas bijective, alors l'image de T est contenue dans un hyperplan de $\mathbb{R}^d$. Il existe donc une isométrie U telle que $E := U(\mathrm{Im}\,T) \subset \{x = x(_1, \cdots, x_d);\ x_1 = 0\}$. On a donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E \subset \bigcup_{n\ge1} P_{n,\varepsilon} \quad \text{où} \quad P_{n,\varepsilon} = [-\varepsilon 2^{-d(n+1)}, \varepsilon 2^{-d(n+1)}[\times[-2^n, 2^n[^{d-1}$$

Ainsi $\mathrm{Im}\,T \subset A_\varepsilon = \displaystyle\bigcup_{n\ge1} {}^tU(P_{n,\varepsilon})$. Clairement $A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon'}$ si $\varepsilon \le \varepsilon'$. De plus, par ce qui vient d'être montré pour les isométries, on a

$$\lambda_d(A_\varepsilon) \le \sum_{n\ge1} \lambda_d(P_{n,\varepsilon}) \le \varepsilon \sum_{n\ge1} 2^{-d(n+1)+d+n(d-1)} = \varepsilon.$$

Donc $\mathrm{Im}\,T$ est contenue dans $\cap_{n\ge1} A_{1/n}$ qui est de mesure nulle. Comme λ_d est complète, $\mathrm{Im}\,T$ est mesurable et $\lambda_d(\mathrm{Im}\,T) = 0$. On obtient donc 5 quand $\det(T) = 0$.
Supposons maintenant que $\det(T) \ne 0$. Par le raisonnement fait pour une isométrie, on sait que $\lambda_d(T(E)) = c(T)\lambda_d(E)$ pour tout borélien. On en déduit que si T et T' inversible alors $c(T\,T') = c(T)c(T')$. D'autre part, T peut se décomposer en un produit de matrices $T = T_1\,T_2 \cdots T_m$ où chacune des matrices T_i est de l'une des trois types suivants (ici $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$) :

1. $\{Te_1, Te_2, \cdots, Te_d\}$ est une permutation de $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$; dans ce cas, si $C = [0,1[^d$, on voit que $T(C) = C$ et donc $c(T) = 1$; clairement, on a $\det T = 1$; donc $c(T) = |\det T|$;

2. $Te_1 = \alpha e_1$ pour $\alpha \neq 0$ et $Te_j = e_j$ si $2 \leq j \leq d$; dans ce cas, on voit que $T(C) = [0, \alpha[\times [0,1[^{d-1}$ si $\alpha > 0$ et $T(C) =]\alpha, 0] \times [0,1[^{d-1}$ si $\alpha < 0$; ainsi $c(T) = |\alpha|$; clairement, on a $\det T = \alpha$; donc $c(T) = |\det T|$;
3. $Te_1 = e_1 + e_2$ pour $\alpha \neq 0$ et $Te_j = e_j$ si $2 \leq j \leq d$; dans ce cas, on voit que $T(C) = \{(x_1, x_2);\ x_1 \leq x_2 \leq x_1 + 1,\ x_1 \in [0,1[\} \times [0,1[^{d-2}\}$ donc $T = T_1 \cup T_2$ où $T_1 = T \cap \{x_2 < 1\}$ et $T_2 = T \cap \{x_2 \geq 1\}$; on a $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ et si on pose $S_2 = T_2 - e_2$, on a $T_1 \cap S_2 = \emptyset$ et $T_1 \cup S_2 = C$; donc $\lambda_d(T(C)) = \lambda_d(C)$ c'est-à-dire $c(T) = 1$; clairement, on a $\det T = 1$; donc $c(T) = |\det T|$.

Comme $T = T_1 T_2 \cdots T_m$, on calcule

$$c(T) = c(T_1)\, c(T_2) \cdots c(T_m) = |\det T_1|\, |\det T_2| \cdot |\det T_m| = |\det T|.$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.22. □

1.4 Continuité et mesurabilité

Si la topologie et la σ-algèbre auxquelles réfèrent les deux termes du titre de la section ne sont pas reliées, il n'y a bien sûr pas lieu d'espérer une relation entre ces notions.
Sur un espace de Hausdorff localement compact, il en va tout autrement si la mesure μ et $\mathcal{S}$, la σ-algèbre associée vérifient les propriétés (2)-(5) du théorème 1.1.

Dans toute cette section, nous nous placerons dans le cadre d'une mesure borélienne μ, sur un espace topologique séparé X, qui est finie sur les compacts et régulière.

Bien entendu, on pourrait aussi supposer que l'on travaille sur la complétion $(X, \mathcal{S}, \mu)$, pour laquelle la mesure est aussi régulière (comme c'est le cas par la construction du théorème de Riesz).

Théorème 1.25. *(Théorème de Lusin) Soient $f :\ X \to \mathbb{C}$ mesurable et $A \in \mathcal{B}(X)$ tels que $\mu(A) < +\infty$ et $f(x) = 0$ si $x \notin A$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que*

$$\mu(\{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon. \tag{1.17}$$

On peut de plus choisir g de façon que

$$\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| \tag{1.18}$$

On peut aussi dire, par régularité intérieure, que si $f : X \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable et A une partie de mesure finie, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset A$ avec $\mu(A \setminus K) \leq \varepsilon$ et une fonction continue à support compact g telle que $f = g$ sur K.

Démonstration. Mentionnons d'abord une approche possible et naturelle de ce résultat. Par régularité, on sait approcher (au sens de coïncider sur un ensemble de grande mesure) une fonction indicatrice par une fonction continue, et on sait donc approcher les fonctions étagées. Pour une fonction positive, on l'approche par une suite de fonctions étagée, qui coincident donc elle-mêmes avec une suite de fonctions continues sur un ensemble de grande mesure. Par le théorème d'Egoroff (sur la partie de mesure finie A) on trouve un sous-ensemble proche en mesure sur lequel la convergence est uniforme, et un sous-ensemble toujours grand en mesure où la suite coincide avec la suite de fonctions continues. Or une limite uniforme de fonctions continues est continue. Par ce raisonnement, on trouve un sous-ensemble K de A (compact si l'on veut, par régularité), proche en mesure, sur lequel f est continue, i.e. $f_{|K}$ continue (attention, on ne dit pas que...). C'est parfois comme ça qu'est énoncé le Théorème de Lusin. Mais cette forme est plus faible (dans un espace localement compact). On peut en déduire la forme forte ci-dessus en montrant qu'on peut étendre une fonction continue sur un compact en une fonction continue sur X, à support compact, et avec l'inégalité voulue sur les sup.

On va plutôt faire une approche directe de cette version forte du théorème. On va faire des réductions successives pour se ramener au cas où f est bornée et A est compact.

Mais remarquons d'abord que pour obtenir le second énoncé (dans le cas f borné), il suffit de modifier g de la façon suivante. Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $\varphi(z) = z$ si $|z| \leq R := \sup_{x \in X} |f(x)|$ et $\varphi(z) = R\, z\, |z|^{-1}$ si $|z| \geq R$. Alors φ est une application continue de $\mathbb{C}$ dans le disque centré en 0 de rayon R. Si g satisfait (1.17) alors $g_1 = \varphi \circ g$ satisfait (1.17) et (1.18).

Pour établir l'existence d'une fonction g, montrons qu'on peut se ramener au cas où f est bornée. En effet, on a $\cap_{n\geq 1}\{x;\ |f(x)| > n\} = \emptyset$. Donc, comme $\mu(\{x;\ |f(x)| > 0\}) \leq \mu(A) < +\infty$, on a $\mu(\{x;\ |f(x)| > n\}) \searrow 0^+$ quand $n \to +\infty$ par convergence croissante. Si on connait le résultat pour les fonctions bornées, appliqué à $\varepsilon/2$ et à la fonction $f \cdot \mathbf{1}_{\{x;\ |f(x)| \leq n\}}$ (qui est bornée) pour n suffisamment grand pour que $\mu(\{x;\ |f(x)| > n\}) < \varepsilon/2$, on en déduit immédiatement le résultat.

On supposera donc dans la suite que f est bornée. Dans ce cas, on peut se ramener au cas où A est compact. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \subset A$ compact tel que $\mu(A \setminus K) \leq \varepsilon/2$. Puis, on applique le résultat déjà obtenu pour $f\, 1_K$ et K.

On est donc ramené au cas où f est bornée est A est compact. Par passage à la partie réelle et la partie imaginaire, on voit qu'il suffit de connaitre le cas d'une fonction bornée à valeurs réelles. On peut se ramener à une fonction à valeurs $[0, 1[$ comme suit : soit M tel $|f| < M$ et φ tel que $A \prec \varphi$. Alors on applique le résultat connu à $\tilde{f} := (f + M\,\varphi)/2M$ pour obtenir celui voulu pour f.

On est donc ramenés à étudier le cas où f est à valeurs dans $[0, 1[$ et nulle en dehors d'un compact $A \subset X$. On va construire une bonne suite de fonction étagées approchant f et on approchera judicieusement les fonctions indicatrices par une fonction continue à l'aide du Lemme d'Urysohn.

Pour cela, pour $n \geq 1$, on définit $\varphi_n : [0, 1] \to [0, 1]$ une suite d'approximation dyadiques de $t \to t$. Soit, pour $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= 2^{-n} k_n \text{ où } k_n \text{ est l'unique entier } \leq 2^n - 1 \text{ tel que } 2^{-n} k_n \leq t < 2^{-n}(k_n + 1) \text{ quand } t \in [0, 1] \\ &= 2^{-n} \lfloor 2^n t \rfloor. \end{aligned}$$

On vérifie que chaque fonction $\varphi_n :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est borélienne, que

$$0 \leq \inf_{t \in [0,1]} (t - \varphi_n(t)) \leq \sup_{t \in [0,1]} (t - \varphi_n(t)) \leq 2^{-n} \tag{1.19}$$

et que $\varphi_n - \varphi_{n-1}$ vaut 0 ou 2^{-n} (sur des intervalles disjoints) ; en particulier si $n \geq m$, on a $\varphi_m \leq \varphi_n$. Notons que $\varphi_0 \equiv 0$ sur $[0, 1[$. On pose alors

$$s_n = \varphi_n \circ f$$

qui vérifie alors que $s_n \to f$, simplement, en croissant. Notons que (1.19) montre que la convergence de $(s_n)_n$ vers f est uniforme. Posons, pour $n \geq 1$,

$$t_n = s_n - s_{n-1}.$$

Par construction des $(s_n)_n$, $2^n t_n$ est l'indicatrice d'un ensemble $T_n \subset A$ et, puisque $s_0 \equiv 0$, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} t_n(x) = \sum_{n \geq} 2^{-n}\, 1_{T_n}(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.20}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et V un ouvert relativement compact contenant le compact A. Par régularité, on peut trouver des compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ et des ouverts $(V_n)_{n\geq 1}$ tels que, pour $n \geq 1$, $K_n \subset T_n \subset V_n \subset V$ et $\mu((V_n \setminus K_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn, pour $n \geq 1$, on construit une fonction g_n telle que $K_n \prec g_n \prec V_n$. Posons

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} g_n(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.21}$$

La série converge uniformément sur X et définit donc une fonction continue dont le support est compact (car contenu dans $\overline{V}$). Comme $2^{-n}g_n(x) = t_n(x) = 2^{-n}1_{T_n}(x)$ pour $x \notin (V_n \setminus K_n)$, par (1.20) et (1.21) on sait que f et g coïncide sauf au plus sur $\bigcup_{n\geq 1}(V_n \setminus K_n)$. Or on a $\mu(\bigcup_{n\geq 1}(V_n \setminus K_n)) \leq \sum_{n\geq 1}\mu(V_n \setminus K_n) \leq \varepsilon$. On a ainsi démontré le théorème 1.25 si f est à valeurs dans $[0,1]$ et A compact.

Ceci achève la preuve du théorème 1.25. $\square$

Corollaire 1.26. *Sous les hypothèse du théorème 1.25, si* $\sup_{x\in X}|f(x)| \leq 1$ *alors il existe une suite* $(g_n)_{n\geq 1}$ *dans* $\mathcal{C}_c(X)$ *tels que, pour* $n \geq 1$, $\sup_{x\in X}|g_n(x)| \leq 1$ *et, pour* μ*-presque tout* x, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$.

Démonstration. Par le théorème de Lusin, pour chaque $n \geq 1$, on peut trouver $g_n \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $|g_n(x)| \leq 1$ sur X et tel que $\mu(\{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}) \leq 2^{-n}$. Comme $\sum_{n\geq 1}\mu(\{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}) < +\infty$, on a

$$\mu(\{x; \#\{n; f(x) \neq g_n(x)\} = +\infty\}) = \mu\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m}\{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}\right) = 0.$$

Ainsi, pour presque tout x, à partir d'un certain rang, la suite $(g_n(x))_n$ est constante et égale à $f(x)$. Ceci achève la preuve du corollaire. $\square$

Passons à l'analogue fonctionnel du fait qu'on peut approcher un ensemble mesurable par un F_σ à l'intérieur et par un G_δ à l'extérieur.

Théorème 1.27. *(Théorème de Vitali-Carathéodory) Soit* $f \in L^1(\mu)$, f *à valeurs réelles. Soit* $\varepsilon > 0$. *Alors, il existe deux fonctions* u *et* v *telles que* $u \leq f \leq v$, u *est semi-continue supérieurement,* v *est semi-continue inférieurement et*

$$\int_X (v-u)d\mu < \varepsilon. \tag{1.22}$$

Démonstration. Supposons d'abord que $f \geq 0$. En reprenant la construction des suites $(s_n)_n$ et $(t_n)_n$ faite au début de la preuve du théorème 1.25 (voir en particulier, (1.20)), on voit que

$$f = \sum_{n\geq 1} c_n \mathbf{1}_{E_n} \tag{1.23}$$

où $(E_n)_n$ sont des boréliens et les $(c_n)_n$ sont strictement positifs.
Par interversion série positive/intégrale, on obtient

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\geq 1} c_n\mu(E_n) \tag{1.24}$$

ainsi comme f est intégrable, la série du membre de droite de (1.24) converge. Soit $\varepsilon > 0$. Par régularité, on construit des compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ et des ouverts $(V_n)_{n\geq 1}$ tels que, pour $i \geq 1$, $K_n \subset E_n \subset V_n$ et

$$c_n\mu((V_n \setminus K_n) < 2^{-n-1}\varepsilon. \tag{1.25}$$

Choisissons N tel que

$$\sum_{i\geq N+1} c_i\,\mu(E_i) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.26}$$

et posons

$$v = \sum_{n\geq 1} c_n \mathbf{1}_{V_n} = \sup_{k\geq 1} \sum_{n=1}^{k} c_n \mathbf{1}_{V_n} \quad \text{et} \quad u = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{1}_{K_n}. \tag{1.27}$$

Alors, par les remarques suivant la définition 0.47, u est semi-continue supérieurement et v est semi-continue inférieurement. La définition des $(K_n)_n$ et $(V_n)_n$ et (1.23) impliquent que $u \leq f \leq v$. Enfin, on calcule

$$v - u = \sum_{n=1}^{N} c_n(\mathbf{1}_{V_n} - \mathbf{1}_{K_n}) + \sum_{n\geq N+1} c_n \mathbf{1}_{V_n} \leq \sum_{n\geq 1} c_n(\mathbf{1}_{V_n\setminus K_n}) + \sum_{n\geq N+1} c_n \mathbf{1}_{E_n}. \tag{1.28}$$

Ainsi (1.25) et (1.26) impliquent (1.22).
Dans le cas général, on décompose $f = f^+ - f^-$ où $(f^\pm)$ sont positives mesurables. On construit $u^\pm$ et $v^\pm$ comme ci-dessus pour $f^\pm$ et on pose $u = u^+ - v^-$ et $v = v^+ - u^-$. En se souvenant de l'exercice 0.48, on voit que u et v on les propriétés requises. Ceci prouve le théorème 1.27. □

Exercice 1.28. Montrer qu'on ne peut pas en général prendre u et v continues.

1.5 Approximation

Soit $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction étagée à valeurs complexes est une fonction de la forme

$$s = \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$$

où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $E_i \in \mathcal{S}$. De manière équivalente, c'est une fonction mesurable prenant un nombre fini de valeurs. C'est pourquoi on peut peut réécrire la fonction (en changeant les α_i et les E_i) pour que les E_i soient deux à deux disjoints (et correspondent aux ensembles où s prend une valeur non-nulle). Sous cette hypothèse, on voit que pour $r > 0$, $|s|^r = \sum_{1\leq i\leq n} |\alpha_i|^r \mathbf{1}_{E_i}$. Par conséquent on a

$$s\ \mu\text{-intégrable} \iff \mu(E_i) < +\infty,\ \forall i \leq n \iff \mu(\{s \neq 0\}) < +\infty \iff s \in L^p(\mu),\ \forall p \in [1, +\infty[.$$

Théorème 1.29. *(Approximation par des fonctions simples)*
Soit S l'ensemble des fonctions s simples à valeurs complexes μ-intégrables. Alors, pour $1 \leq p < +\infty$, S est dense dans $L^p(\mu)$.

Démonstration. On a vu que $S \subset L^p(\mu)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$. Soit maintenant $f \in L^p(\mu)$ telle que $f \geq 0$. On peut alors construire une suite de fonctions simples $(s_n)_{n\geq 1}$ qui converge en croissant vers f (voir le début de la preuve du théorème 1.25). Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq s_n \leq f$. Ainsi $|f - s_n|^p \leq f^p$ et le théorème de convergence dominée nous dit que $\|f - s_n\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc f est dans l'adhérence de S pour la norme $\|\cdot\|_p$. Pour f à valeurs complexes, on la décompose en partie réelle et imaginaire, puis ses parties réelle et imaginaire en différence de partie positive et négative. □

Théorème 1.30. *(Approximation par des fonctions continues) Supposons que $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ est un espace de Hausdorff mesuré tel que la mesure μ soit finie sur les compact et régulière.*
Alors, pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $L^p(\mu)$.

Remarque 1.31. *Dans ce cadre, on peut considérer l'espace vectoriel $\mathcal{C}_c(X)$ muni de la norme $\|f\|_p$. Alors, $L^p(\mu)$ est le complété de cet espace.*

Exemple 1.32 (Exemple important : les ouverts de $\mathbb{R}^d$)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, muni de la topologie trace $\mathcal{T}_\Omega$, qui n'est autre, puisque Ω est ouvert, que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^d$ qui sont inclus dans Ω. La tribu engendré par ces ouverts, $\mathcal{B}(\Omega)$, est aussi la tribu trace des boréliens sur Ω. Alors la mesure de Lebesgue ℓ_d restreinte à $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega)$ est une mesure régulière, finie sur les compact. On en déduit que $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \ell_d)$, pour $p \in [1, +\infty[$.

Examinons un peu l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$. Par définition, un élément $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ est une fonction sur Ω qui est continue sur Ω et dont le support est un compact de $(\Omega, \mathcal{T}_\Omega)$, ce qui veut dire, d'après une remarque faite au chapitre précédent, que le support de f est un compact de $\mathbb{R}^d$ qui est inclus dans Ω. Soit encore, f est une fonction continue sur Ω pour laquelle il existe un compact K de $\mathbb{R}^d$ avec $K \subset \Omega$ et f nulle en dehors de K. Par exemple, $f \in \mathcal{C}_c(]0, +\infty[)$ si et seulement si f est une fonction continue sur $]0, +\infty[$ pour laquelle il existe ϵ, M avec $0 < \epsilon \leq M$ et f nulle en dehors de $[\epsilon, M]$; il est essentiel que $[\epsilon, M] \subset]0, +\infty[$: le support doit rester à une distance > 0 du bord. Par exemple, $x \to (x(1-x))_+$ est une fonction continue à support compact de $\mathbb{R}$, de support $[0, 1]$, et ce n'est pas un élément de $\mathcal{C}_c(]0, +\infty[)$.

Par ailleurs, étant donné une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, on peut considérer la fonction $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}^d$ obtenue en posant $\tilde{f}(x) = 0$ pour $x \notin \mathbb{R}^d$. Alors $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$. En effet, rappelons que la continuité est une notion locale, et qu'une fonction sur $\mathbb{R}^d$ dont la restriction à un ouvert contenant $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est continue sera alors continue en x_0. Ici, la fonction $\tilde{f}$ est continue sur l'ouvert Ω, puisqu'elle y vaut f qui y est continue, et elle continue sur l'ouvert $(\mathrm{supp})^c$, puisqu'elle y est identiquement nulle. Or la réunion de ces deux ouvert (qui justement se recoupent) vaut $\mathbb{R}^d$. Notez que le raisonnement ne fonctionnerait pas si Ω n'était pas ouvert.

Ainsi, on peut tout aussi bien dire qu'un élément de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ dont le support est (inclus dans) un compact inclus dans Ω.

Démonstration. Définissons S comme dans le théorème 1.29. Pour $s \in S$ et $\varepsilon > 0$, par le théorème 1.25 , le théorème de Lusin, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ tel que g et s coïncident sauf sur un ensemble de mesure majorée par ε et, de plus, $\|g\|_\infty \leq \|s\|_\infty$. Ainsi, pour $1 \leq p < +\infty$, $\|g - s\|_p \leq 2\varepsilon^{1/p}\|s\|_\infty$. Le théorème 1.30 est alors un corollaire immédiat du théorème 1.29. □

Théorème 1.33 (Continuité des translations dans L^p)**.** *Considérons $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue et $p \in [1, +\infty[$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on définit $f_x : y \in \mathbb{R}^d \mapsto f(y - x)$. Alors $f_x \underset{|x| \to 0}{\to} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. On a donc que pour $f \in L^p(R^d)$ fixé, l'application*

$$x \to f_x$$

est (uniformément) continue de $\mathbb{R}^d$ dans $L^p(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$.

Démonstration. Soit d'abord $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Les supports des fonctions $(g_x - g)_{|x| \leq 1}$ sont tous contenu dans un compact fixé, puisque $\mathrm{supp}(g_x) = x + \mathrm{supp}(g)$ (OK ?) et ces fonctions sont majorées par $2\|g\|_\infty$. Par continuité, on a $g_x - g \underset{x \to 0}{\to} 0$ en tout point. Le théorème de convergence dominée nous dit alors que $\|g_x - g\|_p \underset{x \to 0}{\to} 0$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

On aurait aussi pu dire que, si on note K un compact contenant les supports de $(g_x - g)_{|x| \leq 1}$, alors pour $\delta \leq 1$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^d,\ \forall |x| \leq \delta, \qquad |g(x - y) - g(y)| \leq 1_K(x) \sup_{z, z' \in \mathbb{R}^d,\ |z' - z| \leq \delta} |g(z') - g(z)|$$

et utiliser qu'une fonction continue et à support compact est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ tout entier (exercice), le dernier terme tendant donc vers zéro lorsque $\delta \to 0$, ce qui donne une convergence uniforme vers zéro sur un compact, ce qui à son tour donne toutes les convergences possibles.

Comme $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, cette convergence s'étend à $L^p(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, on a $\|f_x - f\|_p \leq \|g_x - g\|_p + 2\|f - g\|_p$ car $f_x - g_x = (f - g)_x$ et la mesure de Lebesgue est invariante par translations. □

Définition 1.34. Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Soit $u : X \to \mathbb{C}$. On dit que u *s'annule à l'infini* si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\overline{\{x;\ |u(x)| \geq \varepsilon\}}$ est compact.
L'ensemble des fonctions continues sur X s'annulant à l'infini est noté $\mathcal{C}_0(X)$.

Par exemple, on a que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est constitué des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ qui tendent vers 0 à l'infini.

Théorème 1.35. *Si X est un espace de Hausdorff localement compact, alors $\mathcal{C}_0(X)$ est la complétion de $\mathcal{C}_c(X)$ pour la métrique définie par la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_0(X)$ et $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe K compact tel que $|f(x)| < \varepsilon$ si $x \notin K$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ tel que $0 \leq g \leq 1$ et $g_{|K} = 1$. Donc $h := fg \in \mathcal{C}_c(X)$ et $\|f - h\|_\infty \leq \sup_{x\notin K} |(1-g)(x)f(x)| \leq \sup_{x\notin K} |f(x)| \leq \varepsilon$. Donc, $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $\mathcal{C}_0(X)$.
Soit $(f_n)_n$ de Cauchy dans $\mathcal{C}_0(X)$. Alors, pour $x \in X$, $(f_n(x))_n$ est de Cauchy donc converge vers $f(x)$. Comme $(f_n)_n$ de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$, on a que f_n converge uniformément vers f donc f est continue. Enfin, pour $\varepsilon > 0$, il existe n tel que $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/2$ et K_n un compact tel que $\forall x \notin K_n$, $|f_n(x)| \leq \varepsilon/2$. Donc, $\forall x \notin K_n$, $|f(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi $f \in$ appartient à $\mathcal{C}_0(X)$ qui est donc complet. Ceci complète la preuve du théorème 1.35. □

Remarque 1.36. *Remarquons que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mais $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \neq L^\infty(\mathbb{R}^d)$.*