Chapitre 3

Différentiation

Dans ce chapitre, nous allons étudier les liens entre différentiation de mesures ou de fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ et le comportement de ces dernières sur des ensembles de mesure de Lebesgue petite. Cela permettra de comprendre les liens entre dérivée et intégrale.

La "taille" des ensembles sera donc donnée par la mesure de Lebesgue, qui est la mesure "naturelle" pour l'analyse sur un espace euclidien ; ce sont les liens entre la mesure de Lebesgue et l'analyse que l'on veut approfondir.

3.1 Dérivée d'une mesure et fonction maximale

Exemple 3.1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $f \in L^1(\lambda)$. Peut-on dire que la fonction $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\, d\lambda = \int_{]-\infty,x[} f\, d\lambda$ est dérivable de dérivée f, au moins presque partout ? (on ne peut espérer mieux que presque partout en général). Dans ce chapitre, on va répondre à cette question. Cela va découler du résultat suivant : pour presque tout x on a

$$f(x) = \lim_{R\to 0,\ x\in I,\ \mathrm{diam}(I)=R} \frac{1}{R}\int_I f\, d\lambda.$$

Exemple 3.2. Pour se persuader de la difficulté en général, prenons un exemple intéressant et à l'opposé. Considérons la mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$\mu = \sum_{n\geq 1} a_n \delta_{x_n}.$$

Ici (x_n) est une suite de réels, et prenons-là pour simplifier dans le compact $[0,1]$. La suite (a_n) est votre suite positive sommable préférée ($a_n = \frac{1}{n\log(n)^2}$ ou $a_n = \frac{1}{n^2}$, par exemple). Ainsi la mesure μ est une mesure borélienne positive finie concentrée sur $[0,1]$. La fonction

$$F(x) = \mu(]-\infty, x[)$$

s'écrit

$$F(x) = \sum_{n \text{ t.q. } x_n < x} a_n.$$

Il est classique de voir que F est continue exactement en dehors de (x_n) (pour être précis, en dehors des x_n pour lesquels $a_n \neq 0$) ; ainsi la fonction croissante F est continue en dehors de l'ensemble dénombrable (x_n)). Mais qu'en est-il des points où F est dérivable ? Imaginez que les (x_n) sont denses dans $[0,1]$. Il y en a partout : tous les points de $[0,1]$ sont points d'accumulation de la suite (x_n). Un théorème général va néanmoins nous dire que F est dérivable presque partout. Mais même pour des (x_n) et (a_n) explicites, il est difficile d'en dire plus, car cela va dépendre de la manière dont les sous-suites de $(x_n$ et de (a_n) se comportent (simultanément).

Le prochain résultat sert à motiver les définitions qui lui font suite.

Théorème 3.3. *Soient λ_1 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}$. On définit F, la fonction de répartition de μ : pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mu(]-\infty, x[)$.*
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. *F est dérivable en x et $F'(x) = z$*
2. *$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que, pour I intervalle ouvert contenant x, si $0 < \lambda_1(I) < \delta$ alors $\left|\dfrac{\mu(I)}{\lambda_1(I)} - z\right| < \varepsilon$.*

Rappelons que μ étant une mesure complexe, on ne peut utiliser indument la monotonie. Cependant, on a déjà vu que pour des suites de parties mesurables (boréliennes ici) monotones, on peut passer à la limite.

Cela étant rappelé, il est facile de voir que F est continue à gauche sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu(\{x_0\}) = 0$.

Signalons qu'on préfère parfois travailler avec la fonction $\tilde{F}(x) = \mu(]-\infty, x]) = F(x) + \mu(\{x\})$. Cette fonction est continue à droite, mais a exactement les mêmes points de continuité (et de dérivablité) que F. Seules les valeurs aux sauts changent.

Démonstration. Comme on l'a rappelé, pour que F soit dérivable en x_0, il faut au moins que $\mu(\{x_0\}) = 0$. D'un autre côté, si le point 2. est vérifié pour $x = x_0$, comme $\lambda_1(]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, on doit avoir $\mu(]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[) \to 0$; or $\mu(]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[) \to \mu(\bigcap_n]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[) = \mu(\{x_0\})$ par limite monotone. Ainsi, pour que le point 2. soit vérifié, il faut aussi que $\mu(\{x_0\}) = 0$. On supposera donc dans la suite que l'on est dans ce cas.

Sans perte de généralité, nous supposons $z = 0$: pour voir cela, on choisit χ une fonction continue à support compact égale à 1 au voisinage de x et on considère la mesure complexe $d\tilde{\mu} = d\mu - z\,\chi\, d\lambda_1$, qui vérifiera, pour petit I autour de x, $\tilde{\mu}(I) = \mu(I) - z\lambda_1(I)$, et pour y proche de x, la fonction de répartition sera de la forme $\tilde{F}(y) = F(y) - zy + c$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{C}$. Par ailleurs, en translatant μ on peut aussi supposer que l'on est au point $x = 0$.

Posons

$$G(x) := F(x) - F(0) = \begin{cases} \mu([0, x[) & \text{si } x > 0, \\ \mu([x, 0[) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Rappelons que l'on a supposé que $\mu(\{0\}) = 0$, donc il revient au même de mettre ou pas 0 lorsque qu'on calcule la mesure des intervalles. Il y a quelques avantages à travailler avec G plutôt que F, puisque l'on sépare bien les comportements à droite et à gauche (par ailleurs, G a un sens pour une mesure positive non finie).

Supposons 1. On suppose donc que $\frac{G(x)}{x} \to 0$ lorsque $x \to 0$. Remarquons d'abord que

$$\frac{\mu(\{x\})}{x} \underset{x \to 0^-}{\to} 0.$$

En effet, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $-\delta < x < x' < 0$, on a $\left|\frac{G(x)}{x} - \frac{G(y)}{y}\right| \leq \varepsilon$. Mais $G(x) - G(y) \to \mu(\{x\})$ lorsque $y \to x^+$ (par limite monotone mentionnée plus haut). Ainsi, on a $\left|\frac{\mu(\{x\})}{x}\right| \leq \varepsilon$, d'où le résultat ci-dessus.

Soit $\varepsilon > 0$. On se donne $\delta > 0$ tel que $\left|\frac{G(t)}{t}\right| \leq \varepsilon$ dès que $|t| \leq \delta$ et tel que $\left|\frac{\mu(\{x\})}{x}\right| \leq \varepsilon$ pour $-\delta < x < 0$. Soit I un intervalle ouvert contenant zéro et de longueur plus petite que δ. On a donc $I =]x, y[$

avec $-\delta \leq x < 0 < y \leq \delta$. On a

$$\Big|\frac{\mu(]x,y[)}{y-x}\Big| \leq \frac{|\mu(\{x\})|}{y-x} + \frac{|G(x)|}{y-x} + \frac{|G(y)|}{y-x} \leq \frac{|\mu(\{x\})|}{|x|} + \frac{|G(x)|}{|x|} + \frac{|G(y)|}{y} \leq 3\varepsilon.$$

Réciproquement, supposons 2 **vérifié** (avec $z=0$). On a donc $\mu(\{0\}) = 0$ et F continue en 0. Soit $\varepsilon > 0$ et δ provenant de la propriété 2. On va étudier la dérivabilité à droite et à gauche en 0.

Si $-\delta/2 < x < 0$ donné, soit $h > 0$ tel que $|x| + 2h \leq \delta$, de sorte que $I =]x-h, h[$ est de longueur plus petite que δ et donc on a $\big|\frac{\mu(]x-h,h[)}{|x|+h}\big| \leq \varepsilon$. En faisant $h \to 0^+$ on trouve donc, par limite monotone, $\big|\frac{\mu([x,0])}{|x|}\big| \leq \varepsilon$. Comme $\mu([x,0]) = \mu([x,0[) = G(x)$, cela établit la dérivabilité à gauche.

D'autre part, si $0 < x < \delta/2$, on a, pour $0 < h < \delta/2$ petit, $\big|\frac{\mu(]-h,x[)}{x+h}\big| \leq \varepsilon$. En faisant $h \to 0^+$ on trouve donc, par limite monotone, $\big|\frac{\mu([0,x[)}{x}\big| \leq \varepsilon$. Cela donne la dérivabilité à droite.

□

Le théorème 3.3 suggère de définir la dérivée de la mesure μ en x comme la limite de $\mu(I)/\lambda(I)$ quand l'intervalle I rétrécit vers le point x. En dimension plus grande, la généralisation naturelle est de comparer les mesures sur des voisinages symétriques d'un point.

Notations : On va travailler sur $\mathbb{R}^d$ avec la mesure de Lebesgue, que l'on notera indiférement λ_d ou λ ou dx ou $\mathrm{vol}(\cdot)$ ou $|\cdot|$. On prendra aussi la tribu de Borel ou celle complétée de Lebesgue. On notera $B(x,r)$ la boule ouverte centrée en x de rayon $r > 0$, i.e.

$$B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^d\,;\ |y-x| < r\}.$$

Remarquons que

$$\lambda(B(x,r)) = \lambda(B(0,r)) = c_d\, r^d$$

pour une certaine constante $c_d > 0$ qui dépend de la dimension (et qui vaut $c_d = \lambda(B(0,1))$).

Par ailleurs, on dit qu'une fonction borélienne f sur $\mathbb{R}^d$ est **localement intégrable** (par rapport à Lebesgue), et on écrit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ ou $f \in L^1_{loc}(\lambda)$ si pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$ on a $\int_K |f|\, d\lambda < \infty$, ou de manière équivalente si pour toute boule B de $\mathbb{R}^d$ on a $\int_B |f| < +\infty$ (ou plus généralement pour tout borélien borné) ; en particulier, pour une telle fonction l'intégrale $\int_B f\, d\lambda$ a bien un sens pour toute boule $B \subset \mathbb{R}^d$.

Définition 3.4. Soit μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle que λ_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

1. La *dérivée symétrique* de μ en $x \in \mathbb{R}^d$ est définie, quand celle-ci existe, comme la limite

$$D\mu(x) := \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}. \tag{3.1}$$

2. La *fonction maximale* de μ en $x \in \mathbb{R}^d$ est définie comme $M\mu(x) := \sup_{r>0} \frac{|\mu|(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}$.
3. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la *fonction maximale* de f est la fonction maximale de la mesure $f\, d\lambda_d$; elle est notée Mf.

Remarquons que, par définition, $M\mu = M|\mu|$ et $Mf = M|f|$. Plus généralement, pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ on peut définir

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f|\, d\lambda.$$

Lemme 3.5. *La fonction maximale $M\mu$ est semi-continue inférieurement, donc, mesurable.*

Démonstration. Quitte à la remplacer par $|\mu|$, on peut supposer que μ est positive. Soient $T > 0$ et $E = \{x;\ M\mu(x) > T\}$. Fixons $x \in E$. Alors, il existe $r > 0$ tel que $\frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))} =: t > T$. On remarque que pour $\delta > 0$, si y est tel que $|x - y| < \delta$, alors on a $B(x, r) \subset B(y, r + \delta)$ et par conséquent

$$\mu(B(y, r+\delta)) \geq t\lambda_d(B(x,r)) = t\left[\frac{r}{r+\delta}\right]^d \lambda_d(B(y, r+\delta)) = \left[\left(\frac{t}{T}\right)^{1/d} \frac{r}{r+\delta}\right]^d T\,\lambda_d(B(y, r+\delta)).$$

Comme $\left(\frac{t}{T}\right)^{1/d} > 1$, on peut trouver un réel δ tel que $(r+\delta) < \left(\frac{t}{T}\right)^{1/d} r$. Et alors $B(x,\delta) \subset E$, ce qui montre bien que E est ouvert. □

Le résultat central pour la suite est l'estimation suivante de la mesure des ouverts $\{x; M\mu(x) > t\}$.

Théorème 3.6 (Estimée L^1-faible pour la fonction maximale)**.** *Soit μ une mesure de Borel complexe. Alors pour $t > 0$, on a*

$$\lambda_d(\{M\mu > t\}) \leq 3^d t^{-1} \|\mu\| \quad \text{où} \quad \|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^d). \tag{3.2}$$

Démonstration. On commence par montrer le joli

Lemme 3.7 (Lemme de recouvrement de Vitali)**.** *Soit $W = \bigcup_{1\leq i\leq N} B(x_i, r_i)$ une réunion finie de boules (ouvertes) dans $\mathbb{R}^d$. Alors il existe $S \subset \{1, \ldots, N\}$ tel que*

1. *les boules $(B(x_i, r_i))_{i\in S}$ sont deux à deux disjointes ;*
2. *$W \subset \bigcup_{i\in S} B(x_i, 3r_i)$;*

En particulier on a

$$\lambda_d(W) \leq 3^d \sum_{i\in S} \lambda_d(B(x_i, r_i)) = 3^d \lambda\Big(\bigcup_{i\in S} B(x_i, r_i)\Big).$$

Démonstration. On va donner une procédure pour construire la sous-famille. On notera $B_i = B(x_i, r_i)$, $1 \leq i \leq N$, les boules composant W. On suppose que leurs rayons sont ordonnés de façon décroissante : $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_N$. Posons $i_1 = 1$. Écartons toutes les boules rencontrant B_{i_1}. Soit B_{i_2} la première qui en est disjointe. Écartons toutes les boules rencontrant B_{i_1} et soit i_3, l'indice de la première boule ne rencontrant ni B_{i_1} ni B_{i_2}. On poursuit ce processus jusqu'à épuisement de la famille de boules considérée (qui est finie). On appelle $S = \{i_1, i_2, \cdots\}$ les indices ainsi construits.
On a clairement 1. D'autre part, chaque boule écartée rencontrant l'une des B_{i_j} est contenue dans $B(x_{i_j}, 3r_{i_j})$ par le fait général suivant : si $B(x, R) \cap B(y, r) \neq \emptyset$ et $R \geq r$ alors $B(y, r) \subset B(x, 3R)$. Ceci nous donne 2. Enfin, le 'en particulier' s'en déduit car $\lambda_d(B(x, 3r)) = 3^d \lambda_d(B(x, r))$. □

Fixons μ et t. Soit K un compact de $\{x; M\mu(x) > t\}$. Pour chaque point x de K, il existe une boule B centrée en x telle que $|\mu|(B) > t\lambda_d(B)$. On peut de ce recouvrement de K par des boules ouvertes extraire un recouvrement fini, disons, $K \subset B_1 \cup \cdots \cup B_n$; pour S construit comme dans le lemme 3.7, on a alors

$$\lambda_d(K) \leq 3^d \sum_{i\in S} \lambda_d(B_i) \leq 3^d t^{-1} \sum_{i\in S} |\mu|(B_i) \leq 3^d t^{-1} \|\mu\|.$$

Dans la dernière étape, on a utilisé le fait que les $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux à deux disjointes. On obtient alors (3.2) en prenant le supremum sur les compacts K par la régularité intérieure de la mesure de Lebesgue.
Ceci achève la preuve du théorème 3.6. □

Définition 3.8 (L^1-faible)**.** Soit g Lebesgue mesurable sur $\mathbb{R}^d$. On dit que g est *faiblement intégrable* ou appartient L^1 *faible* si la fonction $t \to t\,\lambda_d(\{y \in \mathbb{R}^d;\ |g(y)| > t\})$ est bornée sur $]0, +\infty[$.
L'ensemble des fonctions mesurables faiblement intégrables sur $\mathbb{R}^d$ est noté $L^1_w(\mathbb{R}^d)$.

L'inégalité (de Markov)

$$\lambda_d(\{y \in \mathbb{R}^d;\ |g(y)| > t\}) \leq t^{-1}\|f\|_1 \tag{3.3}$$

garantit qu'une fonction intégrable est faiblement intégrable. D'ailleurs on a mieux que le caractère borné pour la fonction s.c.i. $t \to t\lambda_d(\{|g| > t\})$, puisque par convergence dominée on voit que $t\lambda_d(\{|f| > t\}) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.
Le théorème 3.6 dit lui que l'opérateur maximal i.e. l'application $f \to Mf$ va de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1_w(\mathbb{R}^d)$: pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et tout $t > 0$, on a

$$\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d;\ Mf(x) > t\}) \leq 3^d t^{-1}\|f\|_1.$$

3.2 Points de Lebesgue et différentiation

Définition 3.9 (Points de Lebesgue)**.** Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On dit que $x \in \mathbb{R}^d$ est *un point de Lebesgue* de f si

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y) = 0. \tag{3.4}$$

Pour être précis, il faudrait dire "la limite existe et vaut zéro". Notez que si x est un point de Lebesgue, alors $\displaystyle\frac{1}{\lambda_d(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) d\lambda_d(y) \longrightarrow f(x)$ lorsque $r \to 0$, ce qui semble intuitif. Cependant, comme on ne modifierait pas les intégrales de f en modifiant f sur un ensemble de mesure nulle, on ne peut espérer trouver $f(x)$ partout.

Clairement (par application immédiate de la définition), un point de continuité de f est un point de Lebesgue de f. Mais il n'est pas clair à priori qu'une fonction intégrable ait un point de Lebesgue. Néanmoins on démontre le résultat essentiel suivant :

Théorème 3.10. *Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, presque tout point de $\mathbb{R}^d$ est point de Lebesgue de f.*

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, on pose

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \limsup_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y) \ \in [0, +\infty] \\ &= \lim_{r_n \searrow 0} \sup_{r \in]0, r_n]} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y) \end{aligned} \tag{3.5}$$

On veut donc démontrer que $Tf = 0$ λ_d-presque partout.
Remarquons d'abord que si $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ alors Tg est nulle.
Soit $\varepsilon > 0$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f - g\|_{L^1} \leq \varepsilon$. On vérifie (par inégalité triangulaire et passage à la limite supérieure) que, ponctuellement,

$$Tf \leq T(f - g) + Tg = T(f - g).$$

De plus, comme pour toute fonction (localement) intégrable h on a trivialement $Th \leq Mh + |h|$ ponctuellement, on en tire que sur $\mathbb{R}^d$ on a

$$Tf \leq M(f - g) + |f - g|.$$

On est déduit une estimée L^1-faible pour Tf contrôlée par $\|f-g\|_1 \le \varepsilon$. En effet, pour $t>0$ on a

$$\{x \in \mathbb{R}^d;\ Tf(x) > t\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d;\ M(f-g)(x) > t/2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d;\ |f(x)-g(x)| > t/2\} \tag{3.6}$$

Par les estimées L^1-faible on en tire que

$$\lambda(\{Tf > t\}) \le (3^d+1)\frac{2}{t}\,\varepsilon$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\lambda(\{Tf>t\}) = 0$ pour tout $t>0$ et donc $Tf = 0$ λ-pp. □

Le théorème 3.10 va nous donner accès à beaucoup d'information sur la dérivation de mesures.

Théorème 3.11. *Soit μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}^d$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit f sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors $D\mu = f$ Lebesgue presque partout ; pour tout borélien E de $\mathbb{R}^d$, on a*

$$\mu(E) = \int_E (D\mu)\,d\lambda_d. \tag{3.7}$$

Ceci nous dit que la dérivée de Radon-Nicodym d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue peut aussi être obtenue par la limite (3.1).

Démonstration. Le théorème de Radon-Nikodym nous dit que (3.7) est vraie avec $D\mu$ remplacée par $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En tout point x qui de Lebesgue pour f, on a

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)\,d\lambda_d(y) = \lim_{r\to 0}\frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}.$$

Ainsi, presque partout, $(D\mu)(x)$ existe et vaut $f(x)$. On a donc (3.7). □

Définition 3.12. On dit qu'une suite de boréliens de $\mathbb{R}^d$, disons $(E_j)_{j\ge 0}$, *converge gentiment* vers le point $x \in \mathbb{R}^d$ s'il existe $\alpha > 0$ et une suite de rayons $(r_j)_{j\ge0}$ réels positifs tendant vers 0 tels que, pour tout $j \ge 0$, $E_j \subset B(x, r_j)$ et $\lambda_d(E_j) \ge \alpha r_j^d$.

La condition $\lambda_d(E_j) \ge \alpha r_j^d$ équivaut à l'existence d'une constante $\tilde\alpha > 0$ tel que, pour tout $j \ge 0$ on ait $\lambda_d(E_j) \ge \tilde\alpha\,\lambda(B(x,r_j))$, ce qui est peut-être plus éclairant : $E_j \subset B(x,r_j)$ mais les E_j occupent toujours une bonne proportion du volume de $B(x,r_j)$ (par exemple au moins 10%).

Remarque 3.13.
- *Une suite de boules ouvertes ou fermées contenant x dont les rayons tendent vers zéro converge gentiment vers x.*
- *Pour qu'une suite converge gentiment vers un point x il n'est pas nécessaire que x soit dans l'un des éléments de la suite, pas même dans l'adhérence de l'un des éléments. Par exemple la suite de boréliens de $\mathbb{R}$*

  $$]\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}]$$

  converge gentiment vers 0. Par contre, ce n'est pas le cas de la suite $]\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}]$.
- *Une suite de carré dans $\mathbb{R}^2$ dont le diamètre tend vers zéro converge gentiment vers 0. Ce n'est pas forcément le cas d'une suite de rectangle, par contre.*
- *Si une suite $E_j \subset \mathbb{R}^d$ converge gentiment vers 0, alors $E_j(x) := x + E_j$ converge gentiment vers x.*

Théorème 3.14. *À tout $x \in \mathbb{R}^d$, associons une suite de boréliens, disons $(E_j(x))_{j\geq 0}$ qui converge gentiment vers le point x. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, en tout point x qui est de Lebesgue pour f (donc, en particulier, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$), on a*

$$f(x) = \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{\lambda_d(E_j(x))} \int_{E_j(x)} f d\lambda_d. \tag{3.8}$$

Démonstration. Soit x un point de Lebesgue de f fixé. Soient $\alpha(x) > 0$ et $(B(x, r_i))$ le nombre positif et la suite de boules associés à la suite $(E_i(x))_i$ par la définition 3.12. Comme $E_i(x) \subset B(x, r_i)$, on a

$$0 \leq \frac{1}{\lambda_d(E_i(x))} \int_{E_i(x)} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y) \leq \frac{1}{\alpha(x)} \frac{1}{\lambda_d(B(x, r_i))} \int_{B(x,r_i)} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y).$$

Comme $r_i \to 0$ et que x est un point de Lebesgue de f, le membre de droite de cette inégalité tend vers 0. Le membre de gauche tend aussi vers 0. On a donc démontré (3.8). □

Corollaire 3.15. *Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\, d\lambda_1$. Alors F est dérivable en tout point de Lebesgue de f et, en ces points, $F'(x) = f(x)$.*

Démonstration. Soit x un point de Lebesgue de f. Alors, si $h_n > 0$ est une suite quelconque tendant vers 0 on a

$$\frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} = \frac{1}{h_n} \int_{[x,x+h_n]} f \to f(x)$$

puisque $[x, x + h_n]$ converge gentiment vers x. Ainsi, F est dérivable à droite de dérivée f. On fait de même à gauche en utilisant que $F(x - h_n) - F(x) = -\int_{[x-h_n,x]} f$. □

Pour l'instant on a étudié les mesures absolument continues par rapport à celle de Lebesgue. Tournons nous vers celles singulières.

Théorème 3.16. *À tout $x \in \mathbb{R}^d$, associons une suite de boréliens, disons $(E_j(x))_{j\geq 0}$ qui converge gentiment vers le point x.*
Soit μ une mesure de Borel complexe telle que $\mu \perp \lambda_d$. Alors, pour Lebesgue presque tout x, $D\mu(x) = 0$ et plus généralement on a

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\mu(E_j(x))}{\lambda_d(E_j(x))} = 0 \qquad \lambda_d - pp. \tag{3.9}$$

Démonstration. En décomposant μ en ses partie réelle et imaginaire puis en utilisant la décomposition de Jordan de celles-ci (voir le commentaire suivant la définition 2.13), on voit qu'on peut supposer que μ est positive (finie, donc).

Soit donc μ une mesure positive avec $\|\mu\| = \mu(X) < \infty$. En utilisant comme précédemment les deux inégalités provenant de la définition de converger gentiment, on a

$$\frac{\mu(E_i(x))}{\lambda_d(E_i(x))} \leq \frac{1}{\alpha(x)} \frac{\mu(B(x, r_i))}{\lambda_d(B(x, r_i))}.$$

Ainsi, (3.9) sera une conséquence de

$$D\mu(x) = 0 \quad \lambda_d\text{-presque partout} \tag{3.10}$$

que nous allons maintenant démontrer.

Si μ était portée par un fermé F de mesure nulle, on aurait immédiatement que $D\mu(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus F$ et donc le résultat voulu. On va adapter cette idée en utilisant la régularité de μ : on va perdre un petit bout qu'on contrôlera à l'aide de la fonction maximale.

Définissons la dérivée supérieure $D^+\mu$ comme

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad D^+\mu(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))} = \lim_{n\to+\infty} \left[\sup_{0<r<1/n} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))} \right].$$

C'est une fonction borélienne comme la quantité dans le crochet est semi-continue inférieurement (voir la démonstration du lemme 3.5).
Soit $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\mu \perp \lambda_d$, μ est concentrée sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Comme μ est régulière (par le théorème 2.8), il existe K compact tel que $\lambda_d(K) = 0$ et $\mu(K) > \|\mu\| - \varepsilon$.
Soit $\mu_1(E) := \mu(K \cap E)$ pour E borélien. La mesure positive donnée par $\mu_2(E) = \mu(E) - \mu_1(E) = \mu(K^c \cap E)$ est telle que $\|\mu_2\| = \mu_2(X) \leq \varepsilon$. Pour $x \notin K$, on a $\mu_1(B(x,r)) = 0$ pour r petit, puisque $X \setminus K$ est ouvert, et donc $D^+\mu(x) = D^+\mu_2(x) \leq (M\mu_2)(x)$. Ainsi $\{x \in \mathbb{R}^d;\ D^+\mu(x) > t\} \subset K \cup \{x \in \mathbb{R}^d;\ (M\mu_2)(x) > t\}$ et le théorème 3.6 montre que $\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d;\ D^+\mu(x) > t\}) \leq 3^d t^{-1} \|\mu_2\| \leq 3^d t^{-1} \varepsilon$, ceci pour tout $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. On en déduit que $D^+\mu = 0$, λ_d-presque partout. $\square$

En combinant ce résultat avec le théorème 3.11, on obtient le

Corollaire 3.17. *À tout $x \in \mathbb{R}^d$, associons une suite de boréliens, disons $(E_j(x))_{j\geq 0}$ qui converge gentiment vers le point x. Soit μ une mesure de Borel complexe.*
Si la décomposition de Lebesgue de μ s'écrit $d\mu = f\, d\lambda_d + d\mu_s$ alors, pour Lebesgue presque tout x, on a

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\mu(E_j(x))}{\lambda_d(E_j(x))} = f(x).$$

En particulier $\mu \perp \lambda_d$ si et seulement si $(D\mu)(x) = 0$ pour Lebesgue presque tout x.

Sur les ensembles qui ne sont pas μ négligeables, $D\mu$ se comporte tout-à-fait différemment comme le montre l'exemple δ_0 pour lequel $D\delta_0(0) = +\infty$. En fait, on a le

Théorème 3.18 (HORS PROGRAMME)**.** *Si μ une mesure de Borel positive telle que $\mu \perp \lambda_d$ alors $(D\mu)(x) = +\infty$ pour μ-presque tout x.*

Démonstration. Il existe un borélien $S \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\lambda_d(S) = 0$ et $\mu(\mathbb{R}^d \setminus S) = 0$.
Pour $n \geq 1$, soit E_n l'ensemble des $x \in S$ pour lesquels il existe une suite de rayons $(r_i)_{i\geq 1} = (r_i(x))_{i\geq 1}$ strictement positifs tendant vers 0 tels que

$$\mu(B(x,r_i)) < n\, \lambda_d(B(x,r_i)). \tag{3.11}$$

Alors, on a $(D\mu)(x) = +\infty$ pour tout $x \in S \setminus \bigcup_{n\geq 1} E_n$. En effet, si la limite définissant $D\mu(x)$ ne tend par vers $+\infty$, vela veut dire qu'on peut trouver une suite $r_j \to 0$ et un $M > 0$ tel que $\frac{\mu(B(x,r_j))}{\lambda_d(B(x,r_j))}$ et donc x appartient à $E_{\lceil M \rceil}$. Il suffit donc de montrer que chaque E_n est inclus dans un borélien de mesure nulle (donc leur union aussi).

Pour $j \geq 1$, soit $V_j \supset S$ un ouvert tel que $\lambda_d(V_j) < 1/j$. Fixons pour l'instant n et j. Tout point E_n est le centre d'une boule ouverte $B_x \subset V_j$ satisfaisant (3.11). Soit β_x la boule de centre x de rayon un tiers celui de B_x. La réunion de ces boules $(\beta_x)_x$ est un ouvert noté $W_{j,n}$ qui contient E_n et qui se trouve dans V_j. Si on admet l'estimation

Fait 3.19. *$\mu(W_{j,n}) < 3^d n/j$.*

alors, en posant $\Omega_n = \cap_j W_{j,n}$ on a $E_n \subset \Omega_n$, Ω_n est un G_δ avec $\mu(\Omega_n) = 0$. Ceci achève la preuve du théorème 3.18. □

Preuve du Fait 3.19. En effet, soit $K \subset W_{j,n}$ compact. On peut le recouvrir par un nombre finie de β_x. Le lemme 3.7 assure qu'il existe $F \subset E_n$ fini tel que

1. les éléments de $\{\beta_x;\ x \in F\}$ sont deux à deux disjoints,
2. $K \subset \bigcup_{x\in F} B_x$.

Ainsi
$$\mu(K) \leq \sum_{x\in F} \mu(B_x) \leq n \sum_{x\in F} \lambda_d(B_x) = 3^d n \sum_{x\in F} \lambda_d(\beta_x) \leq 3^d\, n\, \lambda_d(V_j) < 3^d n j^{-1}.$$
Ceci prouve le lemme 3.19. □

3.3 Primitives et dérivées

On sait que, si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue alors, pour tout nombre complexe $F(a)$, la fonction définie par

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt \tag{3.12}$$

sur $[a,b]$ est continûment dérivable et $F'(x) = f(x)$; en particulier F est une primitive de f. Rappelons que deux fonction C^1 sur un segment I ayant la même dérivée (sur l'intérieur de I) sont égales sur I à une constante près. On déduit donc du résultat précédent que si F est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors on a on (3.12) avec $f = F'$, c'est-à-dire que F est une primitive de sa dérivée.

On veut comprendre comment ceci s'étend au cadre de l'intégrale de Lebesgue ; voici quelques questions naturelles que l'on peut se poser :

- pour que F soit une primitive suffit-il de supposer que f est intégrable ?
- si F est continue et dérivable presque partout sur $[a,b]$, a-t-on (3.12) avec $f = F'$?

Remarque 3.20. *Deux exemples :*

1. *Soit $f(x) = x^2\sin(x^{-2})$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. Elle est dérivable en tout point mais $\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|dt = +\infty$.*
2. *Supposons F continue sur $[a,b]$, F dérivable presque partout sur $[a,b]$ et F' intégrable. Cela implique-t-il que (3.12) pour $f = F'$?*
   La réponse est non ! En effet, soit $(\delta_n)_{n\geq 0}$ strictement décroissante à termes positifs. Posons $C_0 = [0,1]$. Pour $n \geq 0$, si C_n est la réunion de 2^n segments de longueur $2^{-n}\delta_n$, construisons C_{n+1} à partir de C_n en ôtant de chacun de ces segments en leur centre un segment de façon que la partie restante soit la réunion de deux segments de longueur $2^{-n-1}\delta_{n+1}$ (ceci est possible car $\delta_n > \delta_{n+1}$). Alors C_{n+1} est la réunion de 2^{n+1} segments de longueur $2^{-n-1}\delta_{n+1}$.
   Alors $C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$, $|C_n| = \delta_n$ et si on pose $C = \displaystyle\bigcap_{n\geq 1} C_n$ alors C est compact (car fermé dans $[0,1]$) et de mesure $|C| = \lim_{n\to 0} \delta_n$; C est un ensemble de Cantor. L'ensemble triadique de Cantor correspond au choix de $\delta_n = (\frac{2}{3})^n$, qui est donc de mesure nulle.
   On définit alors $f_n :\ x \in [0,1] \mapsto \int_0^x g_n(t)dt$ où $g_n := \dfrac{1}{\delta_n}\mathbf{1}_{C_n}$; remarquez qu'on trouverait le même f_n en prenant $\frac{1}{\delta_n}\mathbf{1}_{\overset{\circ}{C_n}}$. On voit alors que f_n est continue, croissante et constante (par morceaux) sur le complémentaire de C_n, et même sur le complémentaire de $\overset{\circ}{C_n}$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$. D'autre part,

si I est l'un des 2^n segments composant C_n, on a $\displaystyle\int_I \mathbf{1}_{C_n}(t)dt = \int_I \mathbf{1}_{C_{n+1}}(t)dt$. Ainsi pour $x \notin C_n$, on a $f_n(x) = f_{n+1}(x)$, et aussi pour $x \notin \overset{\circ}{C_n}$ d'ailleurs, et, pour $x \in I$ l'un des segments composant C_n, $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq \displaystyle\int_I |g_n - g_{n+1}|(t)dt \leq 2^{-n+1}$. Par le théorème de Dini (ou simplement par les estimations précédentes, avec le critère de Cauchy) la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue f telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et f' est dérivable sur $[0,1] \setminus C =]0,1[\setminus C$ avec $f'(x) = 0$ si $x \notin C$. En effet, comme le complémentaire ce C est ouvert, si $x \notin C$, il existe α, β avec $0 < \alpha < x < \beta < 1$ et $[\alpha, \beta]$ qui ne rencontre pas C, et cela implique qu'à partir d'un certain rang N, on a $[\alpha, \beta] \cap C_n = \emptyset$, d'où f_n (et donc sa limite f) est constante sur $]\alpha, \beta[$ pour $n \geq N$. En particulier, f' s'annule presque partout lorsque $\lim\limits_{n\to 0} \delta_n = 0$.

Définition 3.21. Soit $f :\ I := [a,b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est *absolument continue* si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| \leq \varepsilon \tag{3.13}$$

pour tout n et toute famille d'intervalles (ouverts) dans I, disons, $]\alpha_1, \beta_1[, \ldots,]\alpha_n, \beta_n[$, deux à deux disjoints vérifiant $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) \leq \delta$.

On remarque que, sur $I = [a,b]$,

- les fonctions absolument continues forment un espace vectoriel ;
- une fonction absolument continue est en particulier (uniformément) continue.
- une fonction continue sur I n'est pas nécessairement absolument continue, comme le montre le second exemple de la remarque 3.20 qui fournit une fonction continue croissante qui n'est pas absolument continue. En effet, si on écrit C_n comme réunion finie de segments N segments disjoints $[a_k, b_k]$ (par exemple avec $a_k < b_k < a_{k+1}$, $a_0 = 0$, $a_N = 1$), alors,
$$\sum_{1\leq k\leq N} (f(b_k) - f(a_k)) = \sum (f_n(b_k) - f_n(a_k)) = f_n(1) - f(0) = 1,$$
puisque $f_n(a_k) = f_n(b_{k+1})$. Mais la somme des longueurs des segments considérés est $\leq |C_n|$, et peut donc être rendue aussi petite que l'on veut.
- Par contre, une fonction lipschtizienne est absolument continue.

Un sens du problème découle facilement de ce que nous avons déjà vu.

Théorème 3.22. *Soit $f \in L^1([a,b])$. Alors la fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = c + \int_0^x f$, où $c \in \mathbb{C}$, est absolument continue.*

De plus F est dérivable presque partout avec $F' = f$ presque partout sur $[a,b]$.

Démonstration. Considérons la mesure $d\mu = f\, d\lambda_1$. Comme $\mu \ll \lambda_1$, le théorème 2.19 nous dit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour E mesurable, si $\lambda(E) \leq \delta$ alors $|\mu|(E) \leq \varepsilon$. En particulier, en prenant E comme une réunion disjointe finie d'intervalles, en remarquant que $|F(a) - F(b)| = |\mu([a,b])| \leq |\mu|([a,b])$, on voit que F est absolument continue.

Le "de plus" a déjà été étudié au corollaire 3.15

□

On va démontrer le résultat important suivant, qui fournit une réciproque à la théorème 3.22 dans le cas des fonctions réelles croissantes.

Théorème 3.23. *Soit $F: I := [a,b] \to \mathbb{R}$ continue croissante. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est absolument continue.*
2. *L'image par F d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle de I est de mesure de Lebesgue nulle.*
3. *F est dérivable presque partout sur I, $f := F'$ est Lebesgue intégrable et on a (3.12).*

Remarque 3.24. *L'hypothèse de continuité est nécessaire pour montrer obtenir la propriété 2 à partir de 1 ou 3 comme le montre l'exemple suivant : considérer la fonction $F: [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = x$ si $x \in [0,1]$ et $F(x) = x+1$ si $x \in]1,2]$.*
On peut noter que la fonction f construite dans le second exemple de la remarque 3.20 envoie l'ensemble de Cantor qui est compact de mesure de Lebesgue nulle sur l'intervalle $[0,1]$. Elle n'est donc pas absolument continue.

Remarque 3.25. *À une fonction $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ croissante on peut associer une mesure borélienne positive (finie) dite mesure de Stieltjes qui est caractérisée par*

$$\mu(]a,x]) = F(x) - F(a).$$

Lorsque F est absolument continue, alors on voit que cette mesure μ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[a,b]$ qui vaut F' :

$$\mu(]a,x]) = \int_a^x F'(t)\,dt.$$

L'exemple de la fonction de Cantor montre que la continuité seule ne suffit pas, puisqu'alors la mesure μ est concentrée sur l'ensemble de Cantor (et donc mutuellement singulière avec la mesure Lebesgue).

Démonstration. Le théorème 3.22 dit que 3⇒1. Il suffit donc de montrer 1⇒2⇒3.
Puisque F est continue croissante, on a

$$F(I) = F([a,b]) = [F(a), F(b)].$$

Supposons que F est AC sur $I = [a,b]$ et soit $E \subset I$, un borélien tel que $\lambda_1(E) = 0$. On veut montrer que $F(E)$ est inclus dans un borélien de mesure nulle (il sera donc en particulier mesurable pour la tribu de Lebesgue). Sans perte de généralité, on peut supposer que $\{a,b\} \cap E = \emptyset$ (enlever ces points ne fait qu'au pire enlever deux points à l'image, ce qui ne changera pas sa mesure). Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ associé à F et ε par la définition 3.21. Il existe V ouvert tel que $\lambda_1(V) \leq \delta$ et $E \subset V \subset I$. On peut écrire V comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints, $V = \bigcup_{i\geq 1}]\alpha_i, \beta_i[$. Ainsi $\sum_{i\geq 1}(\beta_i - \alpha_i) \leq \delta$ et donc, en passant à la limite pour des sommes finies, $\sum_{i\geq 1}(F(\beta_i) - F(\alpha_i)) \leq \varepsilon$. Comme $E \subset V$, on a $F(E) \subset \bigcup_{i\geq 1}[F(\alpha_i), F(\beta_i)]$. Donc, $F(E)$ est contenu dans un borélien de mesure arbitrairement petite. Il est donc contenu dans un borélien de mesure nulle. Ceci prouve 1⇒2.

Supposons 2 vraie. On définit pour tout borélien $E \subset [a,b]$

$$\mu(E) := \lambda(F(E)).$$

En général, ça se passe très mal quand on prend les images directes ; en particulier une telle formule ne permet pas de définir une mesure à cause du manque d'injectivité (les images d'ensembles disjoints peuvent alors se rencontrer). Mais lorsque F est croissante, on peut quand même s'en tirer comme suit. De la même manière que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable, on montre que les points de $F(I) = [F(a), F(b)]$ ayant plus de deux antécédents est au plus dénombrable, et en particulier de mesure nulle. Il s'agit donc de voir que l'ensemble

$$\mathcal{N} := \{z \in F(I)\ ;\ \mathrm{Card}(F^{-1}(\{z\})) \geq 2\}$$

est fini ou dénombrable et donc borélien de mesure nulle. Cela découle de la continuité pour l'inverse à droite par exemple, ou plus directement de l'observation que $\mathcal{N} = \cup \mathcal{N}_k$ où

$$\mathcal{N}_k := \{z \in F(I)\,; F^{-1}(\{z\}) \text{ contient un segment de longeur } \frac{1}{k}\}$$

est forcément fini, puisqu'à deux éléments distincts de $\mathcal{N}_k$ correspondent deux intervalles disjoints de $[a, b]$ de longueur au moins $\frac{1}{k}$.

Alors, si (E_j) est une famille de boréliens de $[a, b]$ deux à deux disjoints, on a

$$\begin{aligned} \mu(\cup E_j) = \lambda(F(\cup E_j)) = \lambda(\cup F(E_j)) = \lambda(\cup F(E_j) \setminus \mathcal{N}) = \lambda(\cup (F(E_j) \setminus \mathcal{N})) \\ = \sum \lambda(F(E_j) \setminus \mathcal{N}) = \sum \lambda(F(E_j)) = \sum \mu(E_j), \end{aligned}$$

car les ensembles $F(E_j) \setminus \mathcal{N}$ sont deux à deux disjoints. Ainsi μ est une mesure positive bornée ; comme F satisfait 2, elle est absolument continue par rapport à λ_1. Donc, par le théorème de Radon-Nikodym, $d\mu = f\, d\lambda_1$ avec $f \in L^1(I)$ (pour la mesure de Lebesgue). Pour $E = [a, x]$, on a $F(E) = [F(a), F(x)]$ par croissance et continuité. Ainsi

$$F(x) - F(a) = \lambda_1(F(E)) = \mu(E) = \int_a^x f(t)dt.$$

Par le corollaire 3.15, F est dérivable Lebesgue presque partout et $F'(t) = f(t)$ pour presque tout $t \in [a, b]$. Ceci prouve 2⇒3 et achève la preuve du théorème 3.23. □

Pour terminer l'étude dans le cas général, on va passer par une autre classe de fonctions.

Définition 3.26 (Variation totale)**.** Pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ on définit la variation totale de f sur $[a, x]$ pour $x \in [a, b]$ par

$$T_f(a, x) = \sup_{\substack{N \in \mathbb{N}^* \\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x}} \sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \in [0, \infty] \tag{3.14}$$

On remarque que $T_f(a, \cdot)$ est croissante. Si $T_f(a, b) < +\infty$, on dit que f est *à variation bornée* sur $[a, b]$ et $T_f(a, b)$ est alors appelée *la variation totale* de f sur $[a, b]$.

Les fonctions à variations bornées forment un espace vectoriel. De plus :

— Une fonction monotone sur $[a, b]$ est à variation bornée sur $[a, b]$, puisque $T_f(a, b) = f(b) - f(a)$ lorsque f est croissante. En particulier, une fonction à variation bornée n'est pas nécessairement continue. Voir aussi l'exercice plus loin.

— Une fonction lipschtizienne sur $[a, b]$ est à variation bornée sur $[a, b]$.

— Une fonction continue sur $[a, b]$ n'est pas nécessairement à variations bornées (prendre par exemple $x \to x \sin^2(1/x)$ sur $[0, 1]$). Mais une fonction absolument continue est à variations bornées, et même mieux :

Théorème 3.27. *Soit $f :\ I := [a, b] \to \mathbb{C}$ absolument continue. Pour $x \in I$, on pose $T_f(x) = T_f(a, x)$.*

— *Alors les fonctions T_f, $T_f + f$ et $T_f - f$ sont absolument continues sur I.*
En particulier f est à variations bornées.

— *Si f est à valeurs réelles alors les fonctions T_f, $T_f + f$ et $T_f - f$ sont de plus croissantes.*
En particulier, f est différence de deux fonctions croissantes (absolument) continues.

Preuve du théorème 3.27. On notera pour simplifier $T := T_f$. Vérifions d'abord que $T(x)$ est finie pour tout x, et donc que f est à variations bornées. Par absolue continuité de f sur $[a, b]$, on choisit $\delta > 0$ associée à $\varepsilon = 1$. Considérons une partition de $[a, x]$ comme celles intervenant dans (3.14). Par l'inégalité triangulaire, on voit que la somme dans le membre de droite de (3.14) augmente si on raffine la partition. On va donc supposer que, quitte à rajouter des points, on se donne une partition $(t_i)_{i \le N}$ dont le pas est $\le \delta/2$. On regroupe les indices en groupes successifs disjoints $I_1 = \{0, \dots, n_1\}, I_2 = \{n_1 + 1, \dots\}, \dots, I_m = \{\dots, N - 1\}$ de sorte que $\delta/2 \le \displaystyle\sum_{i \in I_j}(t_{i+1} - t_i) \le \delta$ pour chaque $j = 1, \dots, m$. Clairement, m, le nombre total des classes, est majoré par $2(b - a)\delta^{-1}$. Par construction, on a pour tout $j \le m$ que $\displaystyle\sum_{i \in I_j} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \le 1$. On obtient alors que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \le 2(b - a)\delta^{-1}$. Ainsi $T(x) \le 2(b - a)\delta^{-1}$.

Pour $y \ge x$ et pour une partition $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x$ quelconque, on a $T(y) \ge |f(y) - f(x)| + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$ et donc

$$T(y) \ge |f(y) - f(x)| + T(x).$$

Ainsi, si f est à valeurs réelles,

$$T(y) \ge T(x), \quad T(y) \ge -f(y) + T(x) + f(x) \quad \text{et} \quad T(y) \ge f(y) + T(x) - f(x).$$

Ainsi les fonctions T, $T + f$ et $T - f$ sont croissantes.
Il suffit maintenant de montrer que T est absolument continue sur I, les fonctions absolument continues sur I constituant un espace vectoriel.
Soit $]\alpha, \beta[\subset I$. Rappelons que

$$T(\beta) - T(\alpha) = \sup_{\substack{N \in \mathbb{N}^* \\ \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \beta}} \sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})|. \tag{3.15}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ associé à f et ε par la définition 3.21. Choisissons une famille (finie) d'intervalles deux à deux disjoints $((\alpha_j, \beta_j))_{j \ge 1}$ tels que $\displaystyle\sum_{j \ge 1}(\beta_j - \alpha_j) \le \delta$. Alors , si $(t_i^j)_i$ est une partition (quelconque) de $]\alpha_j, \beta_j[$, on obtient une nouvelle famille d'intervalles disjoints $(]t_{i-1}^j, t_i^j[)_{i,j}$ dont la somme des longueur est $\le \delta$ et donc $\sum_{i,j} |f(t_i^j) - f(t_{i-1}^j)| \le \varepsilon$. On tire donc de (3.15) que $\displaystyle\sum_{j \ge 1}(T(\beta_j) - T(\alpha_j)) \le \varepsilon$.
Ainsi T est absolument continue et la preuve de théorème 3.27 complète □

Exercice 3.28. Soit BV l'espace des fonctions sur $[a, b]$ à variation bornée.

1. Montrer que toute fonction à valeurs réelles, monotone sur $[a, b]$ est à variation bornée.
2. Montrer que si $f \in BV$ est à valeurs réelles, alors il existe f_+ et f_- monotones bornées sur $[a, b]$ telles que $f = f_+ - f_-$.
   Indication : on pourra s'inspirer de la preuve du théorème 3.27.

3. Montrer que si $f \in BV$ alors f admet une limite à droite et à gauche en tout point. Au point x, on les notera $f(x \pm 0)$.
4. Montrer que si f est de plus continue à droite, alors dans la décomposition précédente, on peut choisir f_+ et f_- continues à droite.
5. Soit $f \in BV$, avec f continue à droite en tout point de $[a, b[$.
   (a) Montrer qu'il existe une mesure de Borel sur $[a, b]$, disons, μ_f telle que
   $$f(x) - f(a) = \mu_f([a, x]) \quad \text{pour} \quad x \in [a, b].$$
   On appelle μ_f la mesure de Stieltjes-Lebesgue associée à f.
   Indication. Deux méthodes possibles. Prenons $[a, b] = [0, 1]$; on pourra s'inspirer de la construction de la mesure de Lebesgue et considérer la suite de formes linéaires $(M_n)_{n\geq 1}$ définies par
   $$M_n(\phi) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \big(f((j+1)2^{-n}) - f(j2^{-n})\big)\, \phi(j2^{-n}), \quad \phi \in \mathcal{C}([0, 1]).$$
   On vérifiera que ces formes linéaires sont continues, que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge vers M, une forme linéaire continue que l'on peut par le théorème de Riesz représenter par une mesure complexe μ. On en déduira les propriétés requises sur μ. Autrement, on peut se ramener à des mesures de Stieltjes (positives finies) associées à des fonctions croissantes continues à droite.
   (b) Vérifier que $|\mu_f|([a, b]) = \text{var}(f)$.
   (c) Montrer que F définie en (3.14) est une fonction de répartition (celle continue à gauche) de $|\mu_f|$, la variation totale de μ_f (voir définition 2.6).
   (d) Montrer que $\mu_f \ll \lambda_1$ si et seulement si f est absolument continue sur $[a, b]$.
6. Montrer que toute $f \in BV$ est différentiable Lebesgue presque partout et que $f' \in L^1([a, b])$.

On peut maintenant démontrer le

Théorème 3.29. *Soit $F : \ I := [a, b] \to \mathbb{C}$ absolument continue. Alors F est dérivable presque partout sur I, $f := F'$ est Lebesgue intégrable et on a* (3.12).

Démonstration. Clairement, par linéarité, il suffit de démontrer cela pour F à valeurs réelles ce que l'on supposera dorénavant. On a vu au théorème 3.27 que F s'écrit alors comme difference de deux fonctions croissantes absolument continues F_1 et F_2, $F = F_1 - F_2$. On peut alors appliquer le théorème 3.23 à F_1 et F_2 qui satisfont le point 1 de ce résultat. Elles en satisfont donc aussi le point 3 ; donc $F = F_1 - F_2$ satisfait aussi le point 3 du théorème 3.23. Ceci prouve le théorème 3.29 □

La prochain résultat démontre les mêmes conclusions sous un jeu d'hypothèses différent avec une méthode de preuve différente.

Théorème 3.30 (HORS PROGRAMME)**.** *Soit $F : \ I := [a, b] \to \mathbb{C}$ est dérivable en tout point de I et que $f := F'$ est Lebesgue intégrable alors on a* (3.12).

Notez que dans ce résultat on demande que F soit dérivable *en tout point* ; par contre, on ne suppose rien sur l'absolue continuité de F qui est, par le théorème 3.22, un corollaire du résultat.

Démonstration. Il suffit de démontrer que (3.12) est vraie pour $x = b$; on supposera sans perte de généralité de f est à valeurs réelles. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Vitali-Carathéodory (théorème 1.27), il existe g semi-continue inférieurement sur $[a, b]$ telle que $g \geq f = F'$ et

$$\int_a^b g(t)dt < \int_a^b f(t)dt + \varepsilon. \tag{3.16}$$

On a alors $g + \varepsilon/2(b-a) > f$ et $\displaystyle\int_a^b \left(g(t) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) dt < \int_a^b f(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}$.
On peut donc supposer que $g > f$ sur $[a, b]$ et qu'elle vérifie (3.16).
Pour $\eta > 0$ et $x \in [a, b]$, on pose

$$F_\eta(x) = \int_a^x g(t)dt - F(x) + F(a) + \eta(x - a). \tag{3.17}$$

Comme $F' = f$, comme g est semi-continue inférieurement et que $g > f$, à chaque $x \in [a, b]$ correspond δ_x tel que

$$\forall t \in]x, x + \delta_x[, \quad g(t) > f(x) \quad \text{et} \quad \frac{F(t) - F(x)}{t - x} < f(x) + \eta.$$

Donc pour $t \in]x, x + \delta_x[$, on a

$$F_\eta(t) - F_\eta(x) = \int_x^t g(u)du - F(x) + F(t) + \eta(x-t) > (t-x)f(x) - (t-x)(f(x)+\eta) + \eta(t-x) = 0. \tag{3.18}$$

Comme $F_\eta(a) = 0$ et que F_η est continue, l'ensemble des points $\{x \in [a, b];\ F_\eta(x) = 0\}$ admet un plus grand élément, disons, x_+. Si $x_+ < b$, le calcul (3.18) entraîne que $F_\eta(t) > 0$ pour $t \in]x_+, b]$. On voit donc que $F_\eta(b) \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$, (3.16) et (3.17) impliquent

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b g(t)dt < \int_a^b f(t)dt + \varepsilon.$$

En laissant $\varepsilon \to 0^+$, on obtient

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b f(t)dt.$$

En changeant f et $-f$, on obtient que F et f satisfont (3.12) en $x = b$.
La preuve du théorème 3.30 est complète. □