Chapitre 5

Fonctions harmoniques

5.1 Définition et propriétés des fonctions harmoniques, extension de Poisson

5.1.1 Généralités

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $z = x + iy$. On notera $\Re z$ ou $\operatorname{Re} z$ la partie réelle d'un nombre complexe z. On notera $D(z,r) := \{w \in \mathbb{C}\, |z-w| < r\}$ le disque ouvert de rayon $r > 0$ centré en $z \in \mathbb{C}$, et simplement $D := D(0,1)$. Remarquons que $\overline{D(z,r')} \subset D(z,r)$ pour $0 \leq r' < r$.

Dans ce chapitre, on va souvent voir une fonction sur le tore $\mathbb{T} \simeq S^1 = \partial D = \{|z| = 1\}$ comme les valeurs "au bord" d'une fonction sur le disque. La fonction $t \to e^{it}$ est la fonction $z \to z$ au bord, qui est holomorphe sur le disque. Par contre, la fonction $t \to e^{-it}$ est la fonction $z \to \overline{z}$ au bord, et cette fonction n'est pas holomorphe sur le disque ; elle est par contre *harmonique*.

Définition 5.1. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que $u : U \to \mathbb{C}$ est *harmonique sur* U si elle est continue sur D et qu'en tout point de U ses dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ existent et vérifient $\Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Il est très important de remarquer que pour qu'une fonction soit harmonique, il faut et il suffit que ses parties réelle et imaginaire le soient. En effet, les dérivées partielles par rapport à x et à y sont bien définies si et seulement si elles le sont pour les parties réelles et imaginaires le sont, et ces dérivées préservent les fonctions à valeurs réelles, d'où $\Delta \Re f = \Re \Delta f$. On peut aussi dire de manière équivalente que les dérivées partielles commutent avec la conjugaison complexe.

Remarquons aussi qu'être harmonique est une notions locale : pour une fonction u sur un ouvert U, on a l'équivalence entre

- la fonction u est harmonique sur U
- la fonction u est harmonique sur tout disque ouvert $D(z,r) \subset U$
- pour tout $z \in U$ il existe un disque ouvert $D(z,r) \subset U$ sur lequel u est harmonique.

Il y a des liens étroits entre fonctions holomorphes et harmoniques.

Remarque 5.2 (Les fonctions holomorphes, et donc leurs parties réelles et imaginaires, sont harmoniques)**.** *On rappelle que si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe (c'est-à-dire $\mathbb{C}$-différentiable i.e. pour $z_0 \in U$, il existe $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + o(z - z_0)$ au voisinage de z_0) alors elle est indéfiniment différentiable en (x, y). La fonction f vérifie alors dans U l'équation de Cauchy-Riemann*

$$\overline{\partial} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0. \tag{5.1}$$

De plus, si on note $\partial f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, *alors* $f'(z_0) = \partial f(z_0)$.
Réciproquement, si f *est continue et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann sur* U *alors elle est holomorphe dans* U.
Rappelons, enfin, que f *est holomorphe dans* U *si et seulement si* f *est développable en série entière au voisinage de chaque point de* U.
On calcule

$$4\overline{\partial}\partial f = 4\partial\overline{\partial} f = \Delta f. \tag{5.2}$$

Ainsi une fonction holomorphe dans U *est harmonique dans* U.

L'égalité (5.2) implique également que la partie réelle (ainsi que la partie imaginaire) d'une fonction holomorphe est harmonique. On verra un peu plus loin que ce résultat admet une réciproque.

Par exemple, les fonctions $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $v(x,y) = 2xy$ sont harmoniques sur $\mathbb{C}$: ce sont les parties réelles et imaginaire de la fonction holomorphe $z \to z^2$.

5.1.2 Le noyau de Poisson

Pour $0 \le r < 1$ et $t \in \mathbb{T}$, on rappelle que le noyau de Poisson est la fonction

$$P(r,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|}e^{ijt} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right). \tag{5.3}$$

On vérifie facilement que

1. $P(r,t) > 0$,
2. $P(r,-t) = P(r,t)$,
3. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,t)dt = 1$,
4. pour $0 < \delta < |t| \le \pi$, on a $P(r,t) \le P(r,\delta)$,
5. $P(r,\delta) \to 0$ quand $r \to 1^-$ (avec $0 < \delta \le \pi$)

Ainsi, si $(r_n)_n$ est une suite positive telle que $r_n \to 1^-$ la suite $(t \mapsto P(r_n,t))_n$ est une approximation (régulière) de l'identité (voir les définitions 4.7 et 4.20).

On note donc $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, le disque unité ouvert, et $\overline{D}$ sa clôture, le disque unité fermé. Son bord est $S^1 = \partial D = \overline{D} \setminus D$; on rappelle que $S^1 \simeq \mathbb{T}$. On identifiera une fonction sur S^1 et une fonction sur $\mathbb{T}$, et on écrira indifféremment $u(t)$ ou $u(e^{it})$.

En posant $z = re^{it} \in D$, on donc

$$P(r,t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}.$$

et plus généralement, pour le noyau de convolution sur $\mathbb{T}$ associé : pour $t, \tau \in \mathbb{T}$, $r \in [0,1[$ et $z = re^{it}$,

$$P(r,t-\tau) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+ze^{-i\tau}}{1-ze^{-i\tau}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\tau}-z|^2}. \tag{5.4}$$

C'est cette dernière fonction de $z \in D$ et $\tau \in \mathbb{T}$ qu'on appelle parfois le noyau de Poisson.

5.1.3 L'intégrale de Poisson

En posant $z = e^{it}$, on identifie donc $\mathbb{T}$ avec le cercle unité $\{z;\ |z| = 1\}$ du plan complexe. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on note $P[f](re^{it})$ son intégrale de Poisson (voir la remarque 4.8),

$$P[f]\left(re^{it}\right) := P(r,\cdot) * f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} \hat{f}(n). \tag{5.5}$$

Attention aux notations : certains ouvrages (et aussi plus loin dans ce cours) notent simplement

$$f(re^{it}) = P[f](re^{it})$$

cette extension de Poisson d'une fonction f sur $\mathbb{T}$. Le fait d'utiliser la même notation f pour l'extension est naturelle, mais un peu troublante au début ; c'est pourquoi nous allons dans un premier temps préférer la notation $P[f]$.

On va considérer cette fonction comme une fonction de la variable complexe $z = re^{it}$ dans D :

$$P[f](z) = P[f](re^{it}).$$

Remarquons qu'en $z = 0$, la valeurs de t n'est pas défnie, mais cela ne pose pas de problème car on voit que $P(0,\cdot) * f \equiv \hat{f}(0)$ sur $\mathbb{T}$. On pourrait aussi invoquer que la formule (5.4) assure que la fonction ne dépend que de z.

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est à valeurs réelles, alors on a donc, d'après les formules pour le noyau de Poisson, la formule, jolie et fort utile, suivante :

$$P[f](z) = P[f]\left(re^{it}\right) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{1+ze^{-i\tau}}{1-ze^{-i\tau}} f(e^{i\tau})d\tau\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z} f(e^{i\tau})d\tau\right]. \tag{5.6}$$

Par le théorème d'holomorphie sous le signe somme, la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z} f(e^{i\tau})d\tau$$

est holomorphe dans D. Ainsi $z \mapsto P[f](z)$ est harmonique dans D si f est à valeurs réelles. Ceci reste vrai pour f intégrable sur $\mathbb{T}$ en la décomposant comme la somme de ses parties réelle et imaginaire. On a :

Théorème 5.3. *Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, l'intégrale de Poisson $P[f]$ est une fonction harmonique dans D. De plus, pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, on a $P[f](r\,e^{it}) \to f(t)$ lorsque $r \to 1^-$.*

Si f est continue sur $\mathbb{T}$, alors on a une convergence plus forte : pour tout $P[f](z) \to f(t)$ lorsque $z \in D$ tend vers e^{it}, uniformément pour $t \in \mathbb{T}$. En particulier, il existe une fonction u continue sur $\overline{D}$ et harmonique sur D telle que $u(e^{it}) = f(t)$ pour tout $t \in D$.

Démonstration. Seule la convergence ponctuelle ou uniforme dans le cas d'une fonction continue est à établir. Mais cela est facile, car les arguments habituels montrent que, pour $r \to 1^-$, on a

$$\sup_{t\in\tau} |P(r,\cdot) * f(t) - f(t)| \to 0.$$

lorsque f est continue. En effet, pour $\delta \in]0,\pi[$ fixé, on a, en découpant l'intégrale sur $[-\pi,\pi]$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P(r,t-\tau)\left|u(e^{i\tau}) - u(e^{it})\right| d\tau \leq \frac{1}{2\pi}\sup_{|t-\tau|\leq\delta} |u(e^{i\tau}) - u(e^{it})| + 2\sup_{\mathbb{T}} |u|\, P(r,\delta).$$

□

Lorsqu'on a une fonction continue sur $\overline{D}$, on a :

Théorème 5.4. *Soit u une fonction continue sur $\overline{D}$ harmonique dans D. Alors, dans D, u est l'intégrale de Poisson de sa restriction à $\mathbb{T}$: $u = P[u_{|D}]$ sur D.*

Lorsque u est à à valeurs réelles, elle est, sur D, la partie réelle de la fonction holomorphe

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z} u(e^{i\tau})d\tau, \quad z \in D. \tag{5.7}$$

Démonstration. Par linéarité de $f \to P[f]$ sur $L^1(\mathbb{T})$, il suffit de considérer le cas d'une fonction à valeurs réelles.

L'argument donné plus haut (par le théorème d'holomorphie sous le signe somme), la fonction F définie par (5.7) est holomorphe dans D, et on a $P[f] = \Re F$ sur D, qui est donc harmonique, comme nous l'avons déjà remarqué.

Posons $u_1 = P[f] = \Re F$ sur D. Il s'agit de montrer que $u_1 = u$. Remaquons d'abord que, par le théorème précédent, $u_1 = P[f]$ se prolonge continûment sur $\overline{D}$ et que $(u_1)_{|\mathbb{T}} = u_{|\mathbb{T}}$ Posons alors $h := u - u_1$. Alors h est continue sur $\overline{D}$, harmonique dans D et nulle sur $\mathbb{T}$. On conclut par le

Fait 5.5 (Principe du maximum)**.** *Soit h une fonction continue sur $\overline{D}$ et harmonique sur D. Si h est ≤ 0 sur ∂D, alors h est ≤ 0 sur $\overline{D}$. On a de même pour ≥ 0.*

En particulier, si h est identiquement nulle sur ∂D, alors h est nulle sur $\overline{D}$.

Supposons que $h \leq 0$ sur le bord, et supposons qu'il existe $z_0 \in D$ tel que $h(z_0) > 0$. Soit $0 < \varepsilon < h(z_0)$. Pour $z \in \overline{D}$, posons $g(z) = h(z) + \varepsilon|z|^2$. Alors $g(z_0) \geq h(z_0) > \varepsilon$ or $g_{|\partial D} \leq \varepsilon$. Donc il existe un point $z_1 \in D$ où la fonction continue g admet son maximum sur $\overline{D}$; c'est en particulier un maximum local dans D. Ainsi en en regardant $t \to g(z_1 + tu)$ au voisinage $t = 0 \in \mathbb{R}$, pour les directions x (i.e. $u = (1, 0)$) et y (i.e. $u = (0, 1)$), on obtient qu'en ce point z_1 on a $\nabla g = 0$ et, également $\partial_x^2 g \leq 0$ et $\partial_y^2 g \leq 0$. Mais le calcul direct montre que $\Delta g = 4\varepsilon > 0$ (puisque $\Delta h = 0$), d'où une contradiction. On a donc bien $h \leq 0$ sur D. On applique le résultat à $-h$ pour le cas où h est ≥ 0 sur le bord.

Ceci achève la preuve du Fait et du théorème 5.4.

□

Signalons que le Fait ci-dessus donne immédiatement que si $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et harmonique sur D, alors $\max_{\overline{D}} u = \max_{\partial D} u$. Nous verrons plus loin une forme plus forte de ce "principe du maximum".

Théorème 5.6. *Soit $U = D(z_0, r_0)$ un disque ouvert et ouvert et $u : U \to \mathbb{R}$ harmonique à valeurs réelles. Alors il existe F holomorphe sur le disque U tel que $u = \operatorname{Re} F$.*

Cette fonction holomorphe sur D est unique à une constante additive réelle près.

Démonstration. En posant pour $z \in D$, $v(z) = u\left(\frac{z-z_0}{r_0}\right)$, on se ramène à une fonction v harmonique sur D. Si on savait que v était continue sur $\overline{D}$, on pourrait conclure directement par le théorème précédent.

On sait que v est continue sur , et donc, si on pose, pour $0 < r < 1$,

$$\forall z \in D, \qquad f_r(z) = v(rz),$$

on construit une fonction harmonique continue sur $\frac{1}{r}D \supset \overline{D}$. Le théorème 5.4 montre que f_r est la partie réelle d'une fonction holomorphe G_r sur D. Ainsi, en faisant la transformation $z \to \frac{1}{r}z$, on a montrer que pour tout $0 < r < 1$, une fonction holomorphe F_r sur rD tel que

$$\forall z \in rD, \qquad u(z) = \operatorname{Re}\bigl(F_r(z)\bigr).$$

Si $0 < r < r' < 1$, on a $\mathrm{Re}\,(F_r - F_{r'})(z) = 0$ sur rD. Donc, $F_r - F_{r'}$ est une fonction holomorphe à valeurs purement imaginaires sur rD : elle est donc constante (par les équations de Cauchy-Riemann, par exemple) ; on peut imposer que cette constante soit zéro. Ainsi $F_{r'}$ est un prolongement holomorphe de F_r à $r'D$. On construit ainsi une fonction holomorphe F sur $D = \bigcup_{0<r<1} rD$, en posant $F(z) = F_r(z)$ pour $r > |z|$, qui vérifiera $v = \mathrm{Re}\, F$. □

Remarque 5.7. *Le raisonnement et le résultat précédent s'étendent au cas d'un ouvert U simplement connexe. Si u est une fonction harmonique sur un ouvert U à valeurs réelles et que U est un simplement connexe, alors u est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur U.*

L'idée est que lorsque U est simplement connexe, les constructions locales que l'on peut faire autour de chaque point de U peuvent se "recoller" pour donner une fonction holomorphe sur U tout entier.

Par contre, il faut bien garder en tête le contre-exemple de la fonction $z \to \log(|z|)$ sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, qui est harmonique à valeurs réelles, mais qui n'est pas la partie réelle d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tout entier (voir Exercices).

La caractérisation du théorème est *locale* et il faut une hypothèse topologique sur l'ouvert pour qu'elle soit globale. Cependant, c'est l'occasion de redire ici que

— une fonction est harmonique si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont ;

— comme être harmonique est une notion locale

Corollaire 5.8 (Régularité des fonctions harmoniques)**.** *Soit u une fonction harmonique sur un ouvert U. Alors u est de classe C^∞ sur U.*

Démonstration. Il suffit d'établir la régularité sur tout disque ouvert $D_0 \subset U$. En séparant partie réelle et partie imaginaire, il suffit de considérer le cas d'une fonction harmonique sur D_0 à valeurs réels. Par le théorème précédent, c'est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur D_0, d'où le résultat. □

Corollaire 5.9 (Stabilité de l'harmonicité par changement de variable holomorphe)**.** *Soient U et V des ouverts de $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe sur V et à valeurs dans U, et si g est harmonique de U à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors $g \circ f$ est encore harmonique sur V.*

Démonstration. En décomposant g en partie réelle et imaginaire, il suffit de prouver le corollaire pour g à valeurs réelles. Soit $z_0 \in V$, $f(z_0) \in U$. Comme U est ouvert, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $D(f(z_0), \epsilon_0) \subset U$ et comme f est continue, il existe $r_0 > 0$ tel que $f(D(z_0, r_0)) \subset D(f(z_0), \epsilon_0)$. Par le théorème précédent il existe une fonction holomorphe F sur $D(f(z_0), \epsilon_0)$ tel que $g = \Re F$ sur ce disque ouvert. Alors la fonction $F \circ f$ est holomorphe sur $D(z_0, r_0)$ et sur ce disque on a $g \circ f = \Re(F \circ f)$, qui est harmonique.

De manière plus directe (et peut-être plus simple !) en utilisant que f, g sont C^∞ sur leurs domaines respectifs, et que f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann, on a :

$$\Delta(g \circ f) = (\Delta g) \circ f.$$

□

Définition 5.10. Soient $u : U \to \mathbb{R}$ harmonique et $v : U \to \mathbb{R}$. On dit que v est une *conjuguée harmonique* de u (sur U) si $u + iv$ est holomorphe sur U.

Étant donné une fonction harmonique $u : U \to \mathbb{R}$, on dit que $v : U \to \mathbb{R}$ est un conjugué harmonique de u si la fonction $u + iv$ est holomorphe sur U.

Remarque 5.11 (Séries conjuguée et fonction conjuguée). *Le but de cette remarque est de donner une explication intuitive du lien entre ces notions. On rappelle qu'étant donné une série trigonométrique* $P := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$ *sur* $\mathbb{T}$*, la série trigonométrique conjuguée est la série* $\tilde{P} := -i\sum_{n\in\mathbb{Z}} sign(n) a_n e^{int}$*. Ainsi, la conjugué de* e^{it} *est* $-ie^{it}$*, et la conjugué de* $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ *est* $\sin(t)$*. En fait, on voit que formellement*

$$P + i\tilde{P} = 2\sum_{n\geq 0} a_n e^{int};$$

l'idée étant que cette série est la valeur au bord de la fonction holomorphe $2\sum_{n\geq 0} a_n z^n$*.*

Supposons que l'on se donne une fonction harmonique simple sur le disque $D \subset \mathbb{R}^2$ *à valeurs réelles, par exemple un polynôme* $P(x,y) \in \mathbb{R}[X,Y]$*. Ce polynôme est aussi une fonction polynôme de* $z, \overline{z}$*. On peut se persuader que pour qu'il soit harmonique, il ne faut pas qu'il y a de termes contenant un* $z\overline{z} = |z|^2$ *car cela donnerait un monôme qui ne serait pas de laplacien nul. On se donne donc une fonction du type*

$$h(z) = P(z) + Q(\overline{z}) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n + \sum_{n>0} b_n \overline{z}^n$$

avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ *deux polynômes complexes (*h *est bien une fonction harmonique, OK ?). On considère la restriction au cercle* $S^1 \simeq \mathbb{T}$ *:*

$$f(t) = h(e^{it}) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{int} + \sum_{n>0} b_n e^{-int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int},$$

en prenant $c_n = a_n$ *pour* $n \geq 0$ *et* $c_n = b_{|n|}$ *pour* $n < 0$*. Notez qu'ici, on a que* h *est le prolongement harmonique de* f*. La fonction conjuguée de* f *(ici toutes les séries trigonométrique convergent trivialement car les suites sont à support fini) est*

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{int} - i\sum_{n>0} b_n e^{-int},$$

de sorte que, comme précédement,

$$f(t) + i\tilde{f}(t) = 2\sum_{n\geq 0} a_n e^{int} = 2P(e^{it}).$$

On remarque aussi que si on pose

$$\tilde{h}(z) := P(z) - iQ(z),$$

alors

- *la fonction* $h(z) + i\tilde{h}(z) = 2P(z)$ *est holomorphe (i.e.* $\tilde{h}$ *est la fonction harmonique conjugué sur* D *de* h*).*
- *la restriction de* $\tilde{h}$ *à* $S^1 \simeq \mathbb{T}$ *est* $\tilde{f}$*.*

Ici, dans le cadre simple des polynômes, on voit que les deux notions sont intimement liés. Pour une fonction générale (sur le tore, et son prolongement harmonique sur le disque), c'est plus délicat.

Le théorème 5.6 garantit l'existence d'une conjuguée harmonique sur tout disque ouvert (et plus généralement sur sur tout ouvert simplement connexe).

On appelle <u>la</u> conjugué harmonique d'une fonction u harmonique sur D à valeurs réelles l'unique fonction v harmonique sur D, à valeurs réelles, avec $v(0) = 0$.

On a une formule lorsque $u = P[f]$.

Sur D, la conjuguée harmonique associée à $P[f]$ pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ à valeurs réelles est la fonction

$$\widetilde{P[f]}(re^{it}) := -i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{sign}(n)\, r^{|n|} e^{int} \hat{f}(n) = Q(r,\cdot) * f(t) \tag{5.8}$$

où l'on a posé

$$Q(r,t) = -i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{sign} n\, r^{|n|} e^{int} = \frac{2r\sin t}{1-2r\cos t + r^2} = \mathrm{Im}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \tag{5.9}$$

pour $z = re^{it}$. La fonction Q sur D est la conjuguée harmonique du noyau de Poisson P sur D (normalisé de façon que $Q(0,t) = 0$).

Attention, $(Q(r,\cdot))_r$ n'est pas du tout une approximation de l'indentité. Néanmoins, nous allons montré plus loin que l'on a bien convergence $Q(r,\cdot) * f(t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{T}$; cette limite définit une fonction du tore qui s'appelle la *conjuguée* de f. Etudier les propriétés de cette fonction est une question délicate : est-elle intégrable ? est-celle bornée lorsque f l'est ? La réponse à ces question est non en général.

5.1.4 La propriété de la moyenne et le principe du maximum

On va continuer à explorer des conséquence immédiates des propriétés précédentes des fonctions harmoniques. Rappelons que pour une fonction holomorphe F sur un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D(z_0, r_0)}$ on a que

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F(z_0 + r_0\, e^{it})\, dt.$$

La partie réelle de l'intégrale étant l'intégrale de la partie réelle, on voit que la propriété précédente reste vraie pour les fonctions harmonique sur U. Cette propriété, dite de la moyenne, caractérise les fonctions harmoniques.

Théorème 5.12. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $u : U \to \mathbb{C}$ continue est harmonique sur U si et seulement si elle vérifie la propriété de la moyenne en tout point de U i.e. $\forall z_0 \in U$, $\forall r_0 > 0$ tels que $\overline{D(z_0, r)} = z_0 + r_0\overline{D} \subset U$, on a*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + r_0\, e^{it}) dt. \tag{5.10}$$

Démonstration. Supposons u harmonique dans U et $\overline{D(z_0, r)}$. Alors il existe une fonction Sans perte de généralité, on peut supposer que u est à valeurs réelles. Soient $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tels que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. Il existe ε_0 tel que $D(z_0, r_0 + \varepsilon_0) \subset U$; posons $\tilde{r}_0 = r_0 + \varepsilon_0 > r_0$. On sait que sur $D(z_0, \tilde{r}_0)$ la fonction u est la partie réelle d'une fonction holomorphe F. Comme $\overline{D(z_0, r_0)} \subset D(z_0; \tilde{r}_0)$, l'argument donné plus haut permet de conclure :

$$u(z_0) = \Re F(z_0) = Re\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F(z_0 + r_0\, e^{it})\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \Re F(z_0 + r_0\, e^{it})\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(z_0 + r_0\, e^{it})\, dt.$$

Signalons au passage que l'on a une formule pour F sur $D(Z_0, \tilde{r}_0) \supset \overline{D(z_0, r_0)}$ en utilisant le noyau de Poisson sur $D(z_0, \tilde{r}_0$:

$$\forall z \in D, \quad F(z_0 + \tilde{r}_0 z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} f(z_0 + \tilde{r}_0 e^{i\tau}) d\tau.$$

Réciproquement, soit u continue sur U et y vérifiant la propriété de la moyenne. La partie réelle et imaginaire vérifient aussi la propriété de la moyenne, donc on peut supposer que u est à valeurs réelles. On va utiliser la propriété suivante :

Fait 5.13. *Soit V un ouvert connexe et $v : V \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant sur V la propriété de la moyenne. Si v atteint son* sup *(ou son* inf*) sur V en un point de V, alors v est constante sur V.*

Démonstration. Notons $M = \sup_V v$ et soit $v_0 \in V$ tel que $v(z_0) = M$. Il existe $r_0 > 0$ tel que $D(z_0, r_0) \subset V$. On a, pour $0 \leq r < r_0$, par la propriété de la moyenne,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} v(z_0 + re^{it})\,dt = v(z_0) \geq \sup_{t\in\mathbb{T}} v(z_0 + re^{it}).$$

Or la fonction $t \to \psi(t) := u(z_0 + re^{it})$ est continue sur $\mathbb{T}$, et cette inégalité n'est possible que si cette fonction ψ est constante sur $\mathbb{T}$, égale donc à $v(z_0) = M$. On a donc montré que $v(z_0 + re^{it}) = M$ pour tout $r < r_0$ et $t \in \mathbb{T}$, soit encore

$$D(z_0, r_0) \subset \{z \in V \,;\, v(z) = M\},$$

On a donc que l'ensemble $\{z \in V \,;\, v(z) = M\}$ est un ouvert (de $\mathbb{C}$ et de V qui est lui-même ouvert). Par ailleurs, comme v est continue, on a que $\{z \in V \,;\, v(z) = M\}$ est un fermé de V. Comme V est connexe, cet ensemble doit être vide ou égal à V. □

Reprenons notre preuve, pour u continue à valeurs réelles sur U vérifiant la propriété de la moyenne. Pour montrer que u est harmonique, il suffit de montrer qu'autour de tout point z_0 de U il existe un disque ouvert sur lequel elle est harmonique. Supposons que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. Il s'agit donc de montrer que la fonction continue définie par $v(z) = u\big(\frac{z - z_0}{r_0}\big)$ sur $\overline{D}$ est harmonique sur D. La fonction $t \to v(e^{it})$ étant continue, elle admet une extension harmonique (donnée par le noyau de Poisson), que l'on notera V, qui est donc harmonique sur D, continue sur $\overline{D}$ et qui coincide avec v sur le bord, d'après le théorème 5.3 . Comme V vérifie aussi la propriété de la moyenne, on a que la fonction continue $h := v - V : \overline{D} \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété de la moyenne sur l'ouvert D. Notons que $h = 0$ sur le bord de D. Si h n'était pas nulle sur D, elle aurait donc un min ou un max sur $\overline{D}$ qui serait non nul, et donc atteint en un point de D (qui serait donc un point où h atteint son sup ou son inf sur D). Mais d'après le Fait, cela voudrait dire que h est constante sur D, et par continuité sur $\overline{D}$, cette constante serait zéro, d'où une contradiction. Ainsi, on a bien que $h = 0$ sur D, et $v = V$ y est donc harmonique.

Ceci achève la preuve du théorème 5.12. □

Remarque 5.14. *En intégrant (5.10) par rapport au rayon du cercle, on voit que si u vérifie la propriété de la moyenne (5.10) sur U, elle vérifie aussi*

$$u(z_0) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{z_0 + r\overline{D}} u(z)dxdy \tag{5.11}$$

si $z_0 + r\overline{D} \subset U$.

Pour la formule de la moyenne, on demande par définition que la fonction soit harmonique sur un voisinage ouvert du disque que l'on considère. Il peut être utile de remarquer que, si on a de la continuité au bord du disque, cela suffit :

Remarque 5.15 (Formule de la moyenne pour u continue sur $\overline{D}$)**.** *Soit u une fonction continue sur $\overline{D}$ et harmonique sur D. Alors*

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(e^{it})\,dt.$$

En effet, si on considère, pour $r < 1$ la fonction $v(z) = u(rz)$, c'est une fonction harmonique sur le disque ouvert $\frac{1}{r}D \supset \overline{D}$, et donc, en appliquant la formule de la moyenne à v on trouve

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(re^{it})\,dt,$$

et ceci pour tout $r < 1$. Comme u est uniformément continue sur $\overline{D}$, il est immédiat de passer à la limite dans cette intégrale lorsque $r \to 1^-$ (mais on peut aussi invoquer le théorème de convergence dominée, bien sûr, puisque u est bornée).

Une autre propriété importante des fonctions harmoniques, qui découle immédiatement de ce que nous venons de voir, est

Théorème 5.16 (Le principe du maximum fort)**.** *Soit U un ouvert connexe borné et $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ continue et harmonique dans U. Alors $\max\limits_{\overline{U}} u = \max\limits_{\partial U} u$ et s'il existe $x_0 \in U$ tel que $u(x_0) = \max\limits_{\overline{U}} u$ alors u est constante égale à $u(x_0)$.*

Evidemment, on a la même propriété pour le min, en appliquant le théorème à $-u$.

Démonstration. Notez qu'une manière équivalente d'énoncer le résultat est que,

— soit u est constante sur $\overline{U}$,

— soit pour tout $x \in U$ on a $u(x) < \max\limits_{\overline{U}} u$.

Comme une fonction harmonique vérifie la propriété de la moyenne, les deux propriétés voulues découlent du Fait 5.13. Puisque u est continue sur $\overline{U}$ compact, elle y ateint son max. Soit $x_0 \in \overline{U}$ un point tel que $u(x_0) = \max\limits_{\overline{U}} u$. Si $x_0 \in U$, c'est un point de U où u atteint son sup, et donc u est constante sur U et donc sur $\overline{U}$. □

En fait, le fait que le max est atteint au bord peut s'établir directement (et facilement) à partir de la définition d'une fonction harmonique, sans passer par la propriété de la moyenne.

Remarque 5.17 (Fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^n$)**.** *Une fonction u est harmonique sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ si elle y est continue et y admet de dérivées secondes avec $\Delta u = 0$ sur U. On a encore que si V est un ouvert avec $\overline{V} \subset U$, alors*

$$\max_{\overline{V}} u = \max_{\partial V} u.$$

On peut aussi montrer, mais c'est plus technique, que si V est connexe et s'il existe $x_0 \in V$ tel que $u(x_0) = \max\limits_{\overline{V}} u$ alors u est constante égale à $u(x_0)$.

Une autre conséquence de la formule de la moyenne est le

Théorème 5.18 (Théorème de Harnack)**.** *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions harmoniques dans un ouvert connexe U.*

1. *Si $u_n \to u$ localement uniformément dans U (i.e. uniformément sur tout compact de U) alors u est harmonique sur U.*
2. *Si $u_1 \leq u_2 \leq \cdots$ alors soit $(u_n)_n$ converge localement uniformément dans U soit elle diverge vers $+\infty$ sur tout U.*

Démonstration. Démontrons 1. Comme $(u_n)_n$ converge uniformément vers u sur tout compact de U, u est continue et elle vérifie la propriété de la moyenne (comme conséquence du théorème de convergence dominée et car tous les $(u_n)_n$ la vérifie). Donc u est harmonique.
Démontrons 2. Quitte à soustraire u_1 à tous les éléments de la suite, on peut supposer $u_1 \geq 0$. Posons $u = \sup u_n$. Soit $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. L'estimée immédiate suivante est utile :

Fait 5.19 (Inégalité de Harnack)**.** *Soit U une fonction harmonique sur D à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Alors, pour tout $re^{it} \in D$ on a*

$$\frac{1-r}{1+r}U(0) \leq U(re^{it}) \leq \frac{1+r}{1-r}U(0). \tag{5.12}$$

Remarque : si $U : D \to \mathbb{R}$ est harmonique sur D et bornée, on peut appliquer l'estimée précédente aux fonctions harmoniques positives $U - \inf_D U$ et $\sup_D U - U$.

Démonstration. Pour $r < 1$ donné, soit $\tilde{r}$ tel que $r < \tilde{r} < 1$, de sorte que la fonction $v(z) = U(\tilde{r}z)$ est continue sur $\overline{D}$, harmonique sur D. . Pour $s < 1$, le noyau de Poisson satisfait à

$$\forall t, \tau \in \mathbb{T}, \qquad \frac{1-s}{1+s} \leq \frac{1-s^2}{1-2s\cos(t-\tau)+s^2} \leq \frac{1+s}{1-s}.$$

En utilisant $v = P[v]$ sur D et la formule de la moyenne sur $\overline{D}$ (on peut, si on veut, remarquer que v est harmonique sur un voisinage ouvert de $\overline{D}$, ou plus simplement utiliser la remarque 5.15), on a

$$\forall t \in \mathbb{T},\ \forall s \in [0,1[\qquad \frac{1-s}{1+s}\,v(0) \leq v(se^{it}) \leq \frac{1+s}{1-s}\,v(0).$$

En prenant $s = \frac{r}{\tilde{r}}$ et en revenant à U, on obtient le résultat voulu. □

Par le Fait appliqué à la fonction $z \to U(z) = u_n(z_0 + r_0 z)$ au point $\frac{r}{r_0}e^{it}$ pour $r < r_0$, on a

$$\frac{r_0 - r}{r_0 + r}u_n(z_0) \leq u_n(z_0 + re^{it}) \leq \frac{r_0 + r}{r_0 - r}u_n(z_0).$$

et donc

$$\forall z \in \overline{D(z_0, \frac{r_0}{2})}, \qquad \frac{1}{3}u_n(z_0) \leq u_n(z) \leq 3\,u_n(z_0). \tag{5.13}$$

Les mêmes inégalités reste donc vraie pour u. On en déduit que soit $u(z) = +\infty$ sur tout $z_0 + r_0 D$ soit $u(z) < +\infty$ (et donc $(u_n)_n$ converge) sur tout $z_0 + r_0 D$. Donc l'ensemble des points z où u est fini (c'est-à-dire où $(u_n)_n$ converge) est ouvert et fermé dans U connexe ; il est donc vide ou égal à U tout entier. S'il est U tout entier, on peut appliquer le théorème de convergence monotone à la formule de Poisson pour les $(u_n)_n$ ce qui nous dit que u vérifie la formule de Poisson dans U et ainsi est harmonique dans U. L'uniformité de la convergence sur tout compact provient de l'inégalité de Harnack, par exemple sous la forme (5.13) appliqué à $u - u_n$ qui donne, pour $z_0 + \frac{r_0}{2}\overline{D} \subset U$,

$$\frac{1}{3}\,(u-u_n)(z_0) \leq \sup_{z \in z_0 + \frac{r_0}{2}\overline{D}} (u-u_n)(z) \leq 3(u-u_n)(z_0).$$

Ceci achève la preuve du théorème 5.18. □

5.2 La fonction conjuguée

Nous allons maintenant étudier la fonction conjuguée d'une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$.

5.2.1 Définition

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. À f, par la formule de Poisson (5.5), on peut associer une fonction harmonique dans D que l'on notera aussi f. Le théorème 4.21, on a $f(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$.

Exercice 5.20. Montrer qu'en tout point de Lebesgue de $t \to f(e^{it})$, on a $f(z) \to f(e^{it})$ quand $z \to e^{it}$, $|z| < 1$ non tangentiellement (i.e. si z reste dans un secteur de la forme $\{z \in D;\ |\arg(1 - ze^{-it})| \le \alpha\}$ (où $0 < \alpha < \pi$ est arbitraire).

La conjuguée harmonique de f (normalisée par la valeur 0 au point 0) est alors définie par (5.8) comme la conjuguée harmonique de f sur D ; on la note $\tilde{f}(re^{it})$ $(0 \le r < 1,\ t \in \mathbb{T})$. On va montrer que, pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, cette fonction harmonique admet une limite radiale en e^{it} i.e. la limite $\lim_{r\to 1^-} \tilde{f}(re^{it})$ existe.

Lemme 5.21 (Joli)**.** *Toute fonction harmonique bornée u sur D est la transformée de Poisson d'une fonction bornée sur $\mathbb{T}$, i.e. $u = P[f]$ avec $f \in L^\infty(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Soit F harmonique et bornée sur D. Soit $(r_n)_n$ une suite positive telle que $r_n \to 1^-$ et $F_n(z) := F(r_n z)$ qui définit donc une fonction harmonique sur $\frac{1}{r_n}D \supset \overline{D}$. Posons $f_n(e^{it}) = F(r_n e^{it}) = F_n(e^{it})$ qui est donc la restriction de F_n à $S^1 \simeq \mathbb{T}$. La suite $(f_n)_n$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{T})$. Comme $L^\infty(\mathbb{T})$ est un Banach, il existe une sous-suite $(f_{n_j})_{j\ge 1}$ qui converge faiblement vers une fonction notée $G \in L^\infty(\mathbb{T})$, c'est-à-dire pour tout $g \in L^1(\mathbb{T})$, $\int_{\mathbb{T}} f_{n_j}\, g$ converge vers $\int Gg$. Soit $z = \rho e^{i\tau} \in D$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} G(t)P(\rho,\tau-t)\,dt &= \lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f_{n_j}(e^{it})P(\rho,\tau-t)dt\\ &= \lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F_{n_j}(e^{it})P(\rho,\tau-t)dt = \lim_{j\to+\infty} F(r_{n_j}\rho e^{i\tau}) = F(\rho e^{i\tau}).\end{aligned}$$

Ainsi F est bien la transformée de Poisson de G ce qui prouve le lemme 5.21. □

Lemme 5.22 (Essentiel)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $\tilde{f}(re^{it})$ définie par (5.8). Alors, pour presque tout t, $\tilde{f}(re^{it})$ a une limite quand $r \to 1^-$.*

Démonstration. On peut décomposer $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$ où $(f_j)_{1\le j\le 4}$ sont intégrables et positives. Par linéarité de l'application $f \mapsto \tilde{f}(re^{it})$ on peut supposer que f est positive.

Par définition de la conjugué harmonique, la fonction $H(z) = f(z) + i\tilde{f}(z)$ est holomorphe sur D avec une partie réelle positive. Ainsi, la fonction

$$G(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z)}$$

est une fonction bien définie, holomorphe sur D, qui de plus est bornée sur D, puisque $|1+a| \ge \sqrt{1+|a|^2} > |a|$ si a est un nombre complexe ayant une partie réelle positive. D'après le Lemme précédent, G est l'extension de Poissson d'une fonction bornée sur $\mathbb{T}$, et admet donc une limite radiale notée encore G presque partout sur $\mathbb{T}$. De plus, il découle de la théorie des fonction holomorphes bornées sur le disque (admis) qu'on ne peut avoir$G(e^{it}) = 11$ que sur un ensemble négligeable de $\mathbb{T}$. Comme $H = \dfrac{G}{1-G}$ sur D, on conclut qu'on a une limite radiale pour H, et donc pour $\tilde{f}$, presque partout.

□

Définition 5.23. La *fonction conjuguée* $\tilde{f}$ d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{T}$ est la limite radiale de $\tilde{f}(re^{it})$, la conjugué harmonique sur de l'extension de Poisson de f.

Remarque 5.24. *On notera que la fonction conjuguée d'une fonction à valeurs réelles est elle aussi à valeurs réelles (voir la preuve du Lemme 5.22).*

Si la série conjuguée de la série de Fourier de f intégrable est la série de Fourier d'une fonction g intégrable, alors, clairement, l'intégrale de Poisson de g est $\tilde{f}(re^{it})$ qui converge radialement vers $g(e^{it})$ presque partout (théorème 4.24). On a alors que $\tilde{f} = g$; ainsi, la définition 5.23 généralise la définition donnée précédement. On peut même en dire un peu plus

Proposition 5.25. *Soit $f \in L^1$.*

1. *Si la série de Fourier converge de f (au sens des sommes partielles symétriques) presque partout (forcément vers f, d'après Féjer) et si la série conjuguée $\sum b_n e^{int}$ avec $b_n = -i\text{sign}(n)\hat{f}(n)$ converge presque partout sur $\mathbb{T}$ vers une fonction $g(t)$, alors $\tilde{f} = g$ presque partout sur $\mathbb{T}$.*
2. *Si $\sum_{\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$, alors $\tilde{f}(t) = -i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \text{signe}(n)\hat{f}(n)e^{int}$ sur $\mathbb{T}$ avec convergence normale de cette série sur $\mathbb{T}$.*

Démonstration. On peut supposer que f est à valeurs réelles. Par définition, l'extension de Poisson de f s'écrit, pour $z = re^{it}$,

$$f(z) = f(re^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{int} = \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1}[\hat{f}(n)z^n + \hat{f}(-n)\overline{z}^n];$$

rappelons que ces séries convegent absolument pour tout $|z| < 1$. Le conjugué de f est

$$\tilde{f}(z) = -i \sum_{n\geq 1}[\hat{f}(n)z^n - \hat{f}(-n)\overline{z}^n].$$

On a déjà vu cela plus haut (convolution avec le noyau conjugué Q_r), mais on peut aussi remarquer que $\tilde{f}$ est à valeurs réelles, et que $f + i\tilde{f}$ est holomorphe.

Soit $t \in \mathbb{T}$ un point ou $f(z)$ a une limite radiale lorsque $z \to e^{it}$ et tel que les séries $\sum \hat{f}(n)e^{int} = f(t)$ et $\sum b_n e^{int} = g(t)$ convergent. Alors $F(z) := f(z) + i\tilde{f}(z) = \hat{f}(0) + 2\sum_{n\geq 1}\hat{f}(n)z^n$ est une série entière sur D, qui converge aussi en $z = e^{it}$, la somme de la série en ce point valant $f(t) + ig(t) = \hat{f}(0) + 2\sum_{n\geq 1}\hat{f}(n)e^{int}$. Le critère d'Abel pour les séries entières assure alors que la limite radiale de F en $z = e^{it}$ est $f(t) + ig(t)$. On en déduit que la limite radiale de $\tilde{f}(z)$ en $z = e^{it}$ est $g(t)$. Presque tous les $t \in \mathbb{T}$ vérifient les trois propriétés requises.

Le deuxième point est beaucoup plus facile, puisque toutes les séries que l'on considère sont normalement convergentes (avec des sommes qui sont des fonctions continues) sur le disque fermé $\overline{D}$.

□

À la suite du théorème 4.26 et du corollaire 4.27, nous avons vu que $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos nt}{\log n}$ est une série de Fourier alors que sa série conjuguée $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nt}{\log n}$ n'en est pas une. Comme $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nt}{\log n}$ converge en tout point (par le critère des séries alternées), sa somme est la fonction conjuguée de $f = \sum_{n\geq 2} \frac{\cos nt}{\log n}$. Par ailleurs, on peut vérifier que $t \mapsto \sum_{n\geq 2} \frac{\sin nt}{\log n}$ n'est pas intégrable. Il existe donc des fonctions intégrables dont la fonction conjuguée n'est pas intégrable.

Remarque 5.26. *Le fait que* $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nt}{\log n}$ *n'est pas une série de Fourier ne suffit pas à démontrer qu'elle ne définit pas une fonction intégrable. Néanmoins on pourra montrer que si* f *et* $\tilde{f}$ *sont intégrables, alors* $\tilde{f}(re^{it})$ *est l'intégrale de Poisson de* $\tilde{f}$*. Ceci permet alors de démontrer que si* $\tilde{f}$ *est intégrable alors sa série de Fourier est la série conjuguée de celle de* f *; ainsi si cette série n'est pas une série de Fourier alors* $\tilde{f}$ *ne peut être intégrable.*
Ce qui nous fait défaut ici est que nous n'avons que la convergence radiale ponctuelle (presque partout) ; nous ne pouvons donc pas contrôler la convergence d'intégrales de telles fonctions.