Exercices. Feuille 1

Exercice 1. (Injection, surjection). Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 2. (Ensembles). Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Pour A et B des parties de E montrer que
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \text{ et } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$
Donner un contre-exemple à l'égalité dans la deuxième inclusion ci-dessus.
2. Pour A et B des parties de F montrer que
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \text{ et } f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Exercice 3. (Ensembles/injectivité) Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$ une application. Montrer les équivalences suivantes :

1. f est injective.
2. $\forall X \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(X)) = X$.
3. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
4. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), (X \cap Y = \emptyset) \Rightarrow (f(X) \cap f(Y) = \emptyset)$.
5. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), Y \subset X \Rightarrow f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.

Exercice 4. Montrez les équivalences suivantes (les deux premières sont utiles) :

– P et (Q et R) $\equiv$ (P et Q) et R
– P ou (Q ou R) $\equiv$ (P ou Q) ou R
– $[(R \Rightarrow Q) \Leftrightarrow Q] \equiv R$
– [P ou ($\neg P$ et Q)] $\equiv$ (P ou Q)

Exercice 5. Donnez les négations des assertions suivantes :

– (P ou Q) $\Rightarrow \neg R$.
– (P et ($P \Rightarrow R$)) ou Q
– P ou ($Q \Leftrightarrow R$)

Exercice 6. Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes, puis les nier.

1. ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
   (a) f est l'application nulle.
   (b) L'équation $f(x) = 0$ a une solution.
   (c) L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution.
2. ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite réelle.)

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
(c) La suite $(u_n)_{n\in N}$ est monotone.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Exprimer à l'aide de quantificateurs que la fonction f est continue. Puis que f n'est pas continue.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur R.
3. Montrer que la fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Théorème de Cantor Soit E un ensemble.

1. Monter qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
   (Indication : considérer l'ensemble $A = \{x \in E : x \notin f(x)\}$.)

Exercice 9. Soit E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

1. Rappeler la définition des classes d'équivalence pour $\sim$.
2. Montrer que les classes d'équivalence pour $\sim$ forment une partition de l'ensemble E.
3. Montrer que toute partition de E provient d'une (unique) relation d'équivalence sur E.
4. Décrire les classes d'équivalence et l'ensemble $E/\sim$ de ces classes dans les cas suivants :
   (a) $E = \mathbb{R}$ et $\sim$ est l'égalité.
   (b) $E = \mathbb{Z}$ et $\sim$ est la congruence modulo n.
   (c) E est l'ensemble des droites d'un plan affine et $\sim$ est la relation "être parallèle".

Exercice 10.

1. On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?
2. On dispose de neuf billes visuellement identiques, elles ont toutes la même masse sauf une. Comment, à l'aide d'une balance à deux plateaux, démasquer l'intrus en trois pesées ?

Exercice 11. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $(\forall\varepsilon \geq 0, |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
2. Montrer que $(\forall\varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Exercice 12. Soit $f : X \to Y$ une application. On note $P(f, X)$ l'ensemble des $x \in X$ qui ne sont pas les seuls antécédents de leur image par f (P comme perte). Que signifie $P(f, X) = \emptyset$? Peut-on avoir $P(f, X) = X$? Comparer $P(f, X)$ et $P(g \circ f, X)$ et exprimer le cas d'égalité.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} : (p, q) \mapsto 2^p(2q+1)$. Montrer que f est bijective. Expliquer ensuite comment construire une bijection de $\mathbb{N}^n$ sur $\mathbb{N}$.