Correction du Partiel du 18 novembre

Exercice 1

- Nature de $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$

La fct $t \longrightarrow \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. On étudie donc les cas 0 et $+\infty$

<u>En 0^+</u> $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1$ et donc $\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1$. Par conséquent, la fonction est prolongeable par continuité en 0^+ : pas de problème pour l'intégrale en 0^+.

<u>En $+\infty$</u>. On a : $\forall t \geq 18$ $\quad 0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$. Or $\int \frac{dt}{t^2}$ CV

Par théo de comp. pour les fct. positives, on a donc que $\int^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$ CV

<u>Bilan</u> : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ CV

- Nature de $\int_0^{+\infty} \cos(t)\, e^{-t^2}\,dt$

On remarque que $t^2 |\cos(t)\, e^{-t^2}| \leq t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

Donc $t^2 |\cos(t)\, e^{-t^2}| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (ie : $|\cos(t)\, e^{-t^2}| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$)

L'intégrale $\int_0^{\infty} \cos(t)\, e^{-t^2}\,dt$ converge donc par critère de Riemann.

- Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt$

La fonction $t \longrightarrow \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1,+\infty[$. On va étudier les cas 1 et $+\infty$

<u>En 1</u> Pour $t \geq 1$ on a $\sqrt{t^2-1} = \sqrt{(t-1)(t+1)}$

On voit donc que en 1^+, $\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{1\times\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{t-1}}$

or $\int_1 \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$ CV (même nature de $\int_0 \frac{dx}{\sqrt{x}}$)

Donc par théo de comparaison pour les fcts positives, $\int_1 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ CV

<u>En $+\infty$</u> : $\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ car $\sqrt{t^2-1} \underset{+\infty}{\sim} t$

Comme $\int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ CV, on a encore par TCPFP que $\int^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ CV

<u>Bilan</u> : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ CV

Exercice 2

1) Classique : on va utiliser Abel.

Tout d'abord, si $2x \in 2\pi\mathbb{Z}$ (càd $x \in \pi\mathbb{Z}$), alors $\forall n \geq 1, \cos(2nx) = 1$ et donc on a affaire à la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ qui converge ssi $\alpha > 1$.

Supposons que $x \notin \pi\mathbb{Z}$.

Posons $V_n := \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1 - e^{2i(n+1)x}}{1 - e^{2ix}}\right)$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)x}}{e^{ix}} \times \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\right)$$

$$= \frac{\sin((n+1)x)\cos(nx)}{\sin(x)}$$

Par conséquent : $\forall n \geq 0 \quad |V_n| \leq \frac{1}{\sin(x)}$ et donc la suite (V_n) est bornée

Par ailleurs, $\frac{1}{n^\alpha} \downarrow_0$ (décroît et tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$)

Par le principe d'Abel, on en déduit que la série $\sum \frac{\cos(2nx)}{n^\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha > 0$ (pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$)

2) Posons $u_n = \frac{\cos^2(nx) + \sin^2(nx)}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$

et $v_n = \frac{\cos^2(nx) - \sin^2(nx)}{n^\alpha} = \frac{\cos(2nx)}{n^\alpha}$

On sait que $\sum u_n$ CV ssi $\alpha > 1$ (Riemann) et

par le 1) : $\sum v_n$ CV $\forall \alpha > 0$ (ici $x \notin \pi\mathbb{Z}$)

Donc pour $\alpha > 0$, la nature de la série $\sum (u_n + v_n)$ est la même que celle de la série $\sum u_n$ car CV + CV = CV
CV + DV = DV

Donc $\sum \frac{\cos^2(nx)}{n^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$

→ Idem pour $\sum \frac{\sin^2(nx)}{n^\alpha}$ qui est $\sum (u_n - v_n)$

Exercice 3

1) La fonction $t \to \frac{1}{t}$ est $\downarrow$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Pour tout $k \geq 1$ on a :

$$\forall t \in [k, k+1] \qquad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

et donc par intégration sur $[k, k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Ces deux inégalités se réécrivent en

$$0 \leq v_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

2) La série $\sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ converge car c'est une série télescopique et $\frac{1}{n}$ ...
Par Théo de comp. pour les séries ≥ 0, on en déduit du 1) que $\sum v_k$ CV.

3) Soit $V_n := \sum_{k=1}^{n} v_k$. La suite (V_n) a une limite ($\Leftrightarrow$ la série $\sum v_k$ CV) que l'on note γ. Par ailleurs V_n est $\uparrow$ et $V_n \geq V_1 = v_1 = 1 - \int_1^2 \frac{dt}{t} > 0$
Donc $\gamma > 0$.
Par la relation de Chasles on a :

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}\right) = H_n - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = H_n - \log(n+1)$$

Donc $\left(H_n - \log(n+1)\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \gamma$

càd $\quad H_n - \log(n+1) = \gamma + o(1)$

i.e. $\quad H_n = \log(n+1) + \gamma + o(1)$

$\quad = \log(n) + \gamma + o(1) \qquad$ car $\log(n+1) = \log(n) + o(1)$

Exercice 4

1) Par Riemann, $\sum \frac{1}{n^s}$ CV <u>ssi</u> $s > 1$
Donc le domaine de déf. de ζ est $]1, +\infty[$.

Soit $a > 1$. Alors $\forall n \geq 1$
$\underline{\forall s \geq a}$ $\quad 0 \leq \frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^a}$

et $\sum \frac{1}{n^a}$ CV. Donc $\sum \frac{1}{n^s}$ CVN sur $[a, +\infty[$.

Par ailleurs $\quad s \longrightarrow \frac{1}{n^s} = e^{-s\log(n)}$ (pour $n \geq 1$ fixé)

est une fonction continue sur $]0, +\infty[$ et donc sur $[a, +\infty[$

Par le théo de continuité des séries de fonctions, on en déduit que ζ est continue sur $[a, +\infty[$

Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, la fonction ζ est continue sur $]1, +\infty[= \bigcup_{a>1} [a, +\infty[$

2) [Comparaison série / intégrale]

Soit $s > 1$ fixé : la fonction $t \longrightarrow \frac{1}{t^s}$ est $\downarrow$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

Pour $n \geq 1$ on a :

$$\forall t \in [n, n+1] : \quad \frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{1}{t^s} \leq \frac{1}{n^s}$$

et donc $\quad \frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s}$

En sommant de 1 à N on trouve, pour $N \geq 1$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^s}}_{= \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^s} - 1} \leq \int_1^N \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$$

tout a une limite quand $N \to +\infty$ et on trouve

$$\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s)$$

Soit encore : $\quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{dt}{t^s} = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{s-1} \frac{1}{t^{s-1}} \right]_1^A = \frac{1}{s-1}$ pour $s > 1$

Donc pour tout $s > 1$: $\quad \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$

Soit encore $\quad 1 \leq \zeta(s) \times (s-1) \leq s \xrightarrow[s \to 1]{} 1$

Par encadrement : $\quad (s-1)\zeta(s) \xrightarrow[s \to 1]{} 1$, CQFD