Exercices : SÉRIES ENTIÈRES

LM 250 **Feuille 9** **Nov-2010**

Exercice n° 9.1

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $z \longrightarrow \dfrac{1}{z_0 - z}$ admet un DSE, en précisant les coefficients et le domaine de convergence. $\left(\text{Poser } w = \dfrac{z}{z_0}\right)$

Exercice n° 9.2

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t}\, dt$.

$\left(\text{Utiliser la minoration } j! \geq k! k^{j-k} \text{ pour } j \geq k.\right)$

Exercice n° 9.3

Soit pour $n \geq 0$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n t\, dt$ et pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $I(z) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 - z\tan t}\, dt$.

Montrer les assertions suivantes :

1/ $\forall n \geq 0$, $I_n \geq \dfrac{1}{2n+2}$

2/ $I(z)$ est une intégrale de Riemann si $y \neq 0$ ou $x < 1$.

3/ $I(z)$ est une intégrale généralisée absolument divergente si $y = 0$ et $x \geq 1$.

4/ $\displaystyle\sum_0^{+\infty} I_n = +\infty$

– En utilisant le critère de Riemann

– En utilisant le Théorème de Fubini.

5/ $\forall x \in [0, 1[$, $\sum I_n x^n$ converge et $\displaystyle\sum_0^{+\infty} I_n x^n = I(x)$.

6/ Le rayon de convergence de la série $\sum I_n z^n$ vaut 1.

7/ $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\sum I_n z^n$ converge et $\displaystyle\sum_0^{+\infty} I_n z^n = I(z)$.

Exercice n° 9.4

Si $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in \mathbb{C}$ alors $t^z = e^{z \ln t}$ et si $x = \Re z$, $\left|t^z\right| = t^x$.

1/ Montrer que, pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^{1+z}}\, dt$ est convergente si $x < 1$.

2/ Montrer que l'application $z \longrightarrow \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^{1+z}}\, dt$ admet un DSE convergent sur $D(0, 1)$.

Exercice n° 10.1

1/ Montrer que $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ admet un DSE, en précisant coefficients et domaine de convergence.

$\left(\text{Noter que } \dfrac{1}{(1-z)^2} = \dfrac{1}{1-z} \times \dfrac{1}{1-z}.\right)$

2/ Généraliser à $\dfrac{1}{(z_0-z)^2}$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Exercice n° 10.2

1/ Déterminer le maximum M de la fonction $f : x \longrightarrow f(x) = x\,|\ln x|$ sur $]0,1]$.

On note $a_n = \displaystyle\int_0^1 \big(f(x)\big)^n dx$.

2/ Vérifier que pour tout $n \geq 3$, $\dfrac{1}{n} \times \left(M - \dfrac{1}{n}\right)^n \leq |a_n| \leq M^n$.

3/ Quel est le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$?

Exercice n° 10.3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $a_n = \dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n! \times n!} = \dfrac{2^{2n+1} I_{2n}}{\pi}$ où $I_{2n} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}\theta\, d\theta$.

Les a_n sont les coefficients binômiaux situés sur l'axe central du triangle de Pascal, 1,2,6,20...

1/ Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$.

2/ Montrer que pour $|z| < R$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - 4z\cos^2\theta} = \sum_0^{+\infty} a_n z^n.$$

3/ Verifier pour $x \in\,]-1, 1[$ que $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - x\cos^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

(Poser $u = \tan\theta$)

4/ En déduire $$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \times \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice n° 11.1

Soit $f = \dfrac{1}{1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6}$.

Calculer $f^{(n)}(0)$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f en 0, pour $13 \leq n \leq 16$.

Exercice n° 11.2

Pour tout n, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. Soit la série $\sum I_n z^n$ et R son rayon de convergence.

1/ Vérifier que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} I_n = 0$.

$\left(\text{Couper l'intégrale en } \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n^\alpha} \text{ en choisissant bien } \alpha\right)$.

2/ Vérifier que $R \geq 1$.

3/ Vérifier que $\sum I_n$ diverge.

4/ Déterminer le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de $\sum I_n z^n$.

Exercice n° 11.3

Soit (E) l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$.

Montrer que pour a_1 donné, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unique telle que $x \longrightarrow \displaystyle\sum_0^{+\infty} a_n x^n$ est une solution de (E), en précisant l'expression des a_n en fonction de a_1 et le RCV de $\sum a_n X^n$.

Exercices Supplémentaires (S)

Exercice n° S1

Déterminer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ le domaine de convergence $\mathcal{D}_a$ de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^{2n}}{n^a}$.

(Distinguer 3 cas.)

Exercice n° S2

1/ Pour $a,\ b \in \mathbb{C}^*$, montrer que le DSE de $\frac{1}{a-bX}$ est $\sum_0^{+\infty} \frac{b^n}{a^{n+1}} X^n$ et que son rayon de convergence $R = \frac{|a|}{|b|}$.

Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *on note* $I(z) = \int_0^1 \frac{e^{zt}}{1 - zt + t^2}\, dt$.

2/ Montrer que $I(z)$ est

– une intégrale généralisée absolument divergente si $x \geq 2$ et $y = 0$,

– une intégrale de Riemann, i.e. sans singularité, lorsque $x < 2$ ou $y \neq 0$.

3/ Montrer l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[0,1]$ telles que pour $|z| < 2$,

$$I(z) = \sum_0^{+\infty} \left(\int_0^1 a_n(t)\, dt \right) z^n.$$

$\left(\text{On notera } I_n = \int_0^1 a_n(t)\, dt.\right)$

Exercice n° S3

On note pour $z \in \mathbb{C}$, $I(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(z-1)t}}{1+t}\, dt$.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{X^n e^{-X}}{n!(1+X)}$ *et* $J_n = \int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt$.

On admet que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} J_n = 0$.

Montrer les assertions suivantes :

1/ $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, tel que $x < 1$, $I(z)$ converge.

2/ $\forall x \in [0,1[$, $\sum J_n x^n$ converge et $\sum_0^{+\infty} J_n x^n = I(x)$.

3/ $\sum J_n$ diverge.

4/ Le rayon de convergence R de $\sum J_n X^n$ est $R = 1$.

5/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\big((n+1)!\big) \times (J_{n+1} - J_n) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}\, e^{-t}}{(1+t)^2}\, dt$.

6/ Le domaine $\mathcal{D}$ de convergence de $\sum J_n X^n$ est $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1,\ z \neq 1\}$.

7/ $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < 1$, $\sum_0^{+\infty} J_n z^n = I(z)$.