Exercice 12.1

1/ Pour $n \geq 1$, écrire $\cos^n X$ sous forme de polynôme trigonométrique complexe, i.e. identifier les c_k, $|k| \leq n$, tels que $\cos^n X = P_n(X) = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikX}$.

2/ Lorsque $n = 2p$, calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.

3/ Quelle identité sur les coefficients binômiaux obtient-on en appliquant Parseval à P_n ?

Exercice 12.2

1/ Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que $x \longrightarrow \int_0^x (\cos^4 t - a) \, dt$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.

2/ Discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$ la convergence de $I_{\alpha,\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^4 t - \alpha}{t^\beta} \, dt$.

Exercice n°3

Soit f la fonction 2π - périodique telle que $f(x) = x$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

1/ Calculer les coefficients de Fourier complexes de f.

2/ Déterminer le domaine de convergence de sa série de Fourier.

Exercice 12.3

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit F_x sur $[0, 1[$ par $F_x(r) = \sum_1^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{inx} r^n}{n}$.

1/ Montrer que F_x est dérivable sur $[0, 1[$.

2/ Calculer[1] $\Re F_x'(r)$.

(Poser $z = -re^{ix}$)

3/ Montrer que $\forall\ 0 < r < 1$, $\Re F_x(r) = -\frac{1}{2} \ln(1 + 2r \cos x + r^2)$.

4/ Pour $|a| < 1$ calculer $I(a) = \int_0^\pi \ln(1 + a \cos x) \, dx$.

1. $\Re$ signifie « partie réelle ».

Exercice 13.1

Soit σ la fonction 2π - périodique égale à X sur $[-\pi, \pi[$.

1/ Calculer ses coefficients de Fourier complexes.

2/ En utilisant Parseval calculer la valeur de $\zeta(2) = \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

3/ Reprendre 1/ et 2/ en remplaçant σ par σ^2.

4/ Calculer $\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Exercice 13.2

Pour tout $x \in]0, 1[$, soit f_x la fonction 2π - périodique telle que $f_x(t) = e^{ixt}$ pour $-\pi \leq t < \pi$.

1/ Montrer que la série de Fourier de f_x ne converge pas normalement.

2/ Calculer les coefficients de Fourier complexes de f_x.

3/ Expliciter l'identité obtenue en appliquant Parseval.

4/ Montrer que $\forall x \in]0, 1[$, $\cot \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$.

Pour $n \geq 1$, on note $u_n = \frac{1}{X-n} + \frac{1}{X+n} = \frac{2X}{X^2 - n^2}$ et $v_n = \ln\left(1 - \frac{X^2}{n^2}\right)$.

5/ Vérifier que $\sum v_n$ converge simplement sur $[0, 1[$.

Soit $S_1 : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application $x \longrightarrow \sum_{1}^{+\infty} v_n(x)$.

Soit H définie sur $]0, 1[$ par $H(x) = \ln(\sin \pi x) - \ln x$.

6/ Montrer qu'il existe une constante $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in]0, 1[$, $S_1(x) = H(x) + \mathrm{C}$.

7/ Quelle est la valeur de C ?

Exercice 13.1

On note pour $s > 0$, $\zeta(s) = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, $\theta(s) = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$,

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt, \qquad I_+(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{1+e^t}\,dt, \qquad I_-(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,dt.$$

1/ Préciser pour chaque série ou intégrale les valeurs de s pour lesquelles elle converge.

2/ Vérifier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $s > 0$, $\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-kt}\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{k^s} \times \Gamma(s)$.

3/ Montrer que pour tout $s > 1$, $\zeta(s) \times \Gamma(s) = I_-(s)$.

4/ Montrer que pour tout $s > 1$, $\theta(s) \times \Gamma(s) = I_+(s)$.

5/ Application[1] : donner les valeurs de $I_+(s)$ et $I_-(s)$ pour $s = 2$ ou 4.

Exercice supplémentaire (Variante exo 13.2)

Exercice V1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit f_x la fonction 2π - périodique telle que $f_x(t) = e^{xt}$ pour $-\pi \leq t < \pi$.

Pour $n \geq 1$, on note $v_n = \ln\left(1 + \frac{X^2}{n^2}\right)$ et $u_n = v_n' = \frac{2X}{X^2+n^2}$.

Soit H définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $H(x) = \ln(\sinh \pi x) - \ln x$.

Montrer les assertions suivantes :

1/ $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{C}_n(f_x) = \frac{(-1)^n \sinh \pi x}{\pi(x - in)}$.

2/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\coth \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\pi}\sum_1^{+\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}$.

3/ $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On note $S_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application $x \longrightarrow \sum_1^{+\infty} v_n(x)$.

4/ Il existe une constante $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $S_1(x) = H(x) + \mathrm{C}$.

5/ $\mathrm{C} = -\ln \pi$.

1. Cf feuille 13