Exercices à rendre le jeudi 4 novembre

Indiquez votre nom et une adresse courriel

Exercice 1.

1. En utilisant une comparaison avec l'intégrale et en remarquant que $\log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log(k)$ montrer que
$$\log(n!) \sim n\log(n).$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Montrer que $n^2 \dfrac{x^n}{n!} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. (On pourra étudier le log).
3. En déduire que la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Retrouver le résultat ci-dessous en utilisant un critère géométrique.

Exercice 2. Donner la nature des séries suivantes
$$\sum n^5 e^{-n} \quad ; \quad \sum \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad \sum \sin\left(\frac{1}{n}\right) \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad \sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 3. On fixe $x \in \mathbb{R}$. Donner la nature des séries suivantes
$$\sum \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad ; \quad \sum \frac{\cos(nx)}{n}.$$