Intégrales généralisées

Exercice 1. (Révisions/calculs sur les intégrales classiques) Calculez les intégrales :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4(x)}{\cos^6(x)}\,dx \ ; \ \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{e^x+1}\,dx \ ; \ \int_0^{\pi/4} x(\tan^2(x)+\tan^4(x))\,dx \ ; \ \int_0^1 a^{3x}e^x\,dx \ (a>0).$$

Soient b, c deux réels tels que $b^2-4c<0$. Calculez la primitive $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx$.

Exercice 2.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\log(x) \leq (x-1)$.
2. Montrer que pour tout $a>0$ on a, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\log(x) \leq \frac{1}{a}\big(x^a-1\big)$.
3. Montrer que pour tout $a>0$ on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$.
4. Montrer que pour tout $a>0$ on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{\log(x)} = 0$.

Exercice 3. Pour chacune des intégrales ci-dessous, indiquer s'il s'agit d'une intégrale de Riemann, ou d'une intégrale généralisée (on précisera alors les singularités)

$$\int_{-2}^{2} \frac{du}{1+u^2}, \quad \int_{-2}^{2} \frac{du}{1+u}, \quad \int_1^2 \frac{\log(t)}{\sqrt{t^2-1}}\,dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}, \quad \int_0^{\pi/4} \sin(t)\log\big(\tan(t)\big)\,dt.$$

Exercice 4. Donner la nature des intégrales généralisées suivantes

$$\int_0^1 \frac{\tan(t)-t}{t^{\frac{5}{2}}\sin(t)}\,dt \ ; \ \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{-1/t}-\cos(1/t)\right)\,dt \ ; \ \int_0^1 \frac{dx}{1-\cos(x)} \ ; \ \int_0^1 \frac{\sin(t)-\sinh(t)}{t^{\frac{5}{2}}}\,dt$$

$$\int_0^1 \frac{1-\sqrt{t}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\,dt \ ; \ \int_5^{+\infty} \log\left(\cos\left(1/x\right)\right)dx \ ; \ \int_0^1 \frac{\sqrt{\sin(u)}}{e^u-\cos(u)}\,du \ ; \ \int_0^1 \frac{dt}{\arcsin(t)-t}$$

Exercice 5. Donnez la nature des intégrales généralisées suivantes

$$\int_0^{+\infty} x^{-\alpha}e^{1/x}\,dx \ ; \ \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{\log x}} \ ; \ \int_0^{+\infty} x^{\alpha}(1-e^{1/\sqrt{x}})\,dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^5\sqrt{u-1}} \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x+1}-x^2} \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,dt$$

Exercice 6. Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\log x} \quad \text{et} \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log(x)}$$

Exercice 7. Donner la nature des intégrales généralisées suivantes

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \sin(x)\, dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x\sqrt{x}}\, dx.$$

Exercice 8. Soit $\alpha > 0$. Que peut-on dire de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$?

Exercice 9. Donner la nature des intégrales généralisées suivantes

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt \ ; \ \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\, dt \ ; \ \int_4^{+\infty} \cos(t^2)\, dt \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t}\, dt \ ; \ \int_1^{+\infty} \sin(u) \sin\left(\frac{1}{u^2}\right) du \ ; \ \int_2^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x \log^2(x)}\, dx$$

Exercice 10.

1. (a) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3 - 6t^2 + 11t - 6}\, dt$ est convergente.
   (b) Calculer cette intégrale en utilisant une décomposition en éléments simples.
2. Déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{(t-2)^4}{(t-1)^x (t-3)^{2/x}}\, dt$ converge

Exercice 11. Déterminer la nature de l'intégrale suivante selon la valeur de α :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+t^\alpha)}{t^3}\, dt.$$

On pourra commencer par déterminer la convergence en $+\infty$, et pour la convergence en 0 distinguer suivant les cas $\alpha \leq 0$ et $\alpha > 0$.

Exercice 12. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ on note $I(z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{zt}}{1 - zt + t^2}\, dt$. Montrer que $I(z)$ est

- une intégrale généralisée convergente si $x \geq 2$ et $y = 0$.
- une intégrale usuelle (de Riemann, i.e. sans singularité) lorsque $x \leq 2$ ou $y \neq 0$.

Exercice 13. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) < 1$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(z-1)t}}{1+t}\, dt$ converge.

Exercice 14. Nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \sin(x)\, dx.$$

Exercice 15. Etudiez la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) dx$. (On pourra faire une DL de la fonction à l'ordre 2).

Exercice 16. Existence et calcul de l'intégrale

$$I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x))\, dx.$$

(On pourra utiliser la relation $\sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$.)

Exercice 17. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue *bornée*.

a) Montrez que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-nt}\, dt = 0$.

b) **(Trop dur)** Montrez que $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-nt}\, dt = \frac{f(0)}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Exercice 18. Soit a, b deux réels strictement positifs. On pose

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}.$$

a) Montrez que l'intégrale $I(a,b)$ est convergente.

b) Démontrez, en utilisant le changement de variable $t = b\tan\theta$, que :

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}.$$

En déduire la valeur de $I(a,a)$ pour $a > 0$.

Exercice 19. Soit E l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in E$ on pose

$$(f|g) := \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

1. Montrer que $(f|g)$ est bien défini.
2. (Hors programme) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur E.

Exercice 20. Pour $a > 0$ on pose

$$\Gamma_1(a) = \int_0^1 t^{a-1}e^{-t}\, dt, \quad \Gamma_2(a) = \int_1^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\, dt,$$

$$\Phi_1(a) = \int_0^1 \log(t)\, t^{a-1}e^{-t}\, dt, \qquad \Phi_2(a) = \int_0^{+\infty} \log(t) t^{a-1}e^{-t}\, dt$$

$$\Psi_1(a) = \int_0^1 (\log(t))^2\, t^{a-1}e^{-t}\, dt, \qquad \Psi_2(a) = \int_0^{+\infty} (\log(t))^2 t^{a-1}e^{-t}\, dt$$

1. Montrer que $\Gamma_1(a)$ converge.
2. Montrer que $t \to t^{a/2}\log(t)$ est bornée sur $[0,1]$. En déduire que $\Phi_1(a)$ converge.
3. Montrer que $\Psi_1(a)$.
4. Montrer que pour tout $0 < a < b$, on a $0 \le \Gamma_1(a) - \Gamma_1(b) \le (b-a)|\Phi_1(a)$.
5. En déduire que $a \to \Gamma_1(a)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

6. Montrer que pour tout $0 < a < b$ on a $\left|\Gamma_1(a) - \Gamma_1(b) + (b-a)\Phi_1(a)\right| \leq \frac{(a-b)^2}{2}\Psi_1(a)$.
7. Que peut-on en déduire sur Γ_1 ?
8. Reprendre, en les adaptant, les question précédentes en remplaçant Γ_1 par Γ_2.
9. Qu'en déduit-on sur $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. ?

Exercice 21.

1. Démontrer que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x$$
est convergente et déterminer sa valeur.
2. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{1}{x^4+1}$. On pourra remarquer que $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.
3. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$
4. On pose $J := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$. Montrer que
$$J = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$
et en déduire la valeur de J.