Partiel du 18 novembre 2010

Exercice 1. (2—1—2) Donner la nature des intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt\ ; \quad \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-t^2}\,dt\ ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt.$$

Exercice 2. (3—3) Soit $\alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés.

1. Étudiez la nature (en fonction de α et x) de la série $\sum \frac{\cos(2nx)}{n^\alpha}$.
2. On suppose que $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Déterminez en fonction de α la nature des séries

$$\sum \frac{\cos^2(nx)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\sin^2(nx)}{n^\alpha}.$$

Exercice 3. (2—1—3) On introduit la suite $v_k := \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$, $k \geq 1$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a

$$0 \leq v_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

2. Montrer que la série $\sum v_k$ converge.
3. On pose, pour $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$H_n = \log(n) + \gamma + o(1).$$

Exercice 4. (3—3—2) On considère la série de fonctions (de la variable réelle s) suivante :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. Rappeler l'ensemble de définition de ζ. Montrer que la série converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 1$, et que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
2. On fixe $s > 1$. Montrer que

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s) \leq \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^s} + 1\,.$$

3. En déduire que lorsque $s \to 1^+$ on a $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$.

Formulaire

$\cos(\theta) = \mathcal{R}e\left(e^{i\theta}\right)$;

$$\sum_{k=0}^{n} e^{iky} = \frac{1 - e^{i(n+1)y}}{1 - e^{iy}} \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R} \text{ tel que } y \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

$$\cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos(2a) \quad ; \quad \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

Lorsque $n \to +\infty$, on a : $\log(n+1) = \log(n) + o(1)$.

Primitive : $\displaystyle\int \frac{dt}{t^s} = -\frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{t^{s-1}}$ lorsque $s \neq 1$.