Feuille de TD 1

Exercice 1. (Equations linéaires d'ordre 1)
Déterminer toutes les solutions des équations ou problèmes de Cauchy suivants

a) $x'(t) = ax(t) + b, x(0) = 0,$
b) $x'(t) = x(t) + \sin(t), x(0) = 1,$
c) $(1 + t^2)x'(t) + tx(t) = 1,$

Exercice 2. (Equations à variables séparables)
Trouver toutes les solutions des équations ou problèmes de Cauchy suivants

a) $y'(t) = ty(t),$
b) $ty'(t) = y(t),$
c) $y'(t) = y^2(t),$
d) $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, y(0) = 0.$

Exercice 3. (Modélisation de l'évolution de la température)
Un solide dont la température est de 70° C est placé dans une pièce dont la température est de 20° C. On désigne par $\theta(t)$ la température en ° C du solide à l'instant t, l'unité de temps étant la minute. La vitesse de refroidissement $-\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et la température ambiante. Sachant que $\theta(5) = 60$, montrer que la loi de refroidissement du solide est

$$\theta(t) = 50 \left(\frac{4}{5}\right)^{t/5} + 20.$$

Quelle sera la température du solide au bout de 20 minutes ? Quand le solide atteindra la température de la pièce ?

Exercice 4. (Equivalence entre deux équations linéaires d'ordre 2)
Soit a, b des fonctions continues sur un intervalle I. Montrer que si a est de classe C^1 sur I, alors les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur I

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \qquad (*)$$

peuvent s'exprimer en fonction des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur I de la forme

$$y''(t) + p(t)y = 0 \qquad (**)$$

pour une certaine fonction p que l'on déterminera. (On pourra chercher à résoudre l'équation d'origine sous la forme $y(t) = \lambda(t)z(t)$ où z vérifiera l'équation souhaitée).

Solution de l'exercice 4. Soit donc y une solution (de classe C^2 sur I, donc) de (*). Ecrivons-la sous la forme $y(t) = \lambda(t)z(t)$ où λ et z sont des fonctions C^2 sur I à déterminer. On a $y' = \lambda' z + \lambda z'$ et $y'' = \lambda'' z + 2\lambda' z' + \lambda z''$. Ainsi, dire que y est solution de (*) équivaut à demander que

$$\lambda(t)z''(t) + (2\lambda'(t) + a(t)\lambda(t))z'(t) + (a(t)\lambda'(t) + b(t)\lambda(t))z(t) = 0.$$

Si l'on veut que le coefficient devant z' soit nul, on est amené à définir, pour un $t_0 \in I$ fixé,

$$\forall t \in I, \qquad \lambda(t) := e^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}.$$

On constate alors deux choses : d'une part λ est bien de classe C^2 sur I (puisque a est de classe C^1), et d'autre part λ est strictement positive, donc non nulle, sur I. Pour ce choix de λ, l'équation précédente s'écrit

$$z''(t) + p(t)z(t) = 0$$

où p est la fonction continue sur I définie par $p(t) = (a(t)\lambda'(t) + b(t)\lambda(t))/\lambda(t)$.
Ainsi, on a montré que y est une solution de (*) si et seulement si z est solution de (**) par le changement de fonctions $y = \lambda z$, qui est un changement entre fonctions C^2 sur I, avec le choix de λ et p comme indiqué plus haut.

Exercice 5. (Version intégrale du lemme de Gronwall)
Si $\varphi(t) \geq 0$ et $\psi(t) \geq 0$ sont des fonctions continues qui vérifient :

$$\varphi(t) \leq K + L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

pour $t_0 \leq t \leq t_1$, où K et L sont des constantes positives, alors :

$$\varphi(t) \leq K \exp\left(L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

pour $t_0 \leq t \leq t_1$.

Solution de l'exercice 5. Si $\varphi(t) \geq 0$ et $\psi(t) \geq 0$ sont des fonctions continues elles sont intégrables et la fonction :

$$g(t) = \left(K + L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s\right) \exp\left(-L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

est C^1. On la dérive donc et on trouve :

$$g'(t) = L\psi(t)\left(\varphi(t) - K - L \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right) \exp\left(-L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\,\mathrm{d}s\right) \leq 0$$

Donc g est décroissante sur $[t_0, t]$ et vérifie donc sur cet intervalle $g(t) \leq g(t_0) = K$. On a donc

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq K + L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \\ &\leq K \exp\left(L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\,\mathrm{d}s\right) \end{aligned}$$