Feuille de TD 3

Exercice 1. (Méthode de variation dite des deux constantes)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b, c des fonctions continues sur I. On souhaite étudier l'équation différentielle linéaire d'ordre deux sur I avec ou sans second membre c :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

On sait que l'espace des solutions de l'équation homogène est de dimension 2, engendré par des fonction y_1 et y_2 par exemple. La méthode de variations des deux constantes consiste à cherche une solution sous la forme

$$y(t) = \lambda_1(t)y_1(t) + \lambda_2(t)y_2(t)$$

avec λ_1 et λ des fonctions, et avec la propriété que

$$y' = \lambda_1 y_1'(t) + \lambda_2 y_2'(t) \quad \text{et} \quad y''(t) = \lambda_1' y_1' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2' y_2' + \lambda_2 y_2''.$$

La première de ces égalités semble relever d'une cuisine étrange... En d'autres termes, la méthode de variation des deux constantes revient à chercher une solution sous la forme $y(t) = \lambda_1(t)y_1(t)+\lambda_2(t)y_2(t)$ telle que

$$\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = c.$$

a) Expliquer la méthode de variation des deux constantes en revenant à la méthode de variation de la constante pour le système d'équation différentielle linéaire d'ordre 1 en dimension 2.
b) Exemple d'application. Montrer qu'une solution particulière de l'équation

$$y''(t) + y(t) = c(t).$$

est donnée, en fixant un t_0 dans I, par

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} c(s)\sin(t-s)\,ds.$$

Solution de l'exercice 1. Mettons cette équation sous forme de système. On pose donc

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, étudier l'équation de départ équivaut à étudier l'équation

$$X'(t) = A(t)X(t) + C(t)$$

pour $X : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2, qui est donc de la forme $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ avec y solution de l'équation différentielle d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$. Supposons que Y_1 et Y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène $Y' = A(t)Y$. Alors la méthode de variation de la constante revient à chercher une solution de l'équation sous la forme

$$X(t) = \lambda_1(t)Y_1(t) + \lambda_2(t)Y_2(t).$$

Ainsi, on souhaite que $X'(t) = \lambda_1'(t)A(t)Y_1(t) + \lambda_1(t)Y_1'(t) + \lambda_2'(t)Y_2(t) + \lambda_2(t)Y_2'(t) = A(t)X(t) + C(t)$, ce qui équivaut à

$$\lambda_1'(t)Y_1(t) + \lambda_2'(t)Y_2(t) = C(t).$$

Si on se souvient maintenant du lien entre l'équation sur $\mathbb{R}$ et le système, on voit que l'on peut prendre $Y_1(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix}$ et $Y_2(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$. Alors les conditions sur les fonctions λ_1 et λ_2 se comprennent en prenant les coordonnées de cette équation.
Notons que le système d'ordre 1 à résoudre est

$$W(t)\Lambda'(t) = C(t)$$

où $W(t)$ désigne la matrice des vecteurs $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ et $\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix}$. La matrice W s'appelle le *Wronskien* associé à la base Y_1 et Y_2 ; elle est inversible pour tout $t \in I$. Ainsi, du point de vue théorique, on se ramène au problème

$$\Lambda'(t) = W(t)^{-1}C(t).$$

Regardons l'exemple proposé dont l'équation homogène est $y'' + y = 0$. Dans ce cas, les solutions de l'équation homogène sont engendrées par la base $t \to \cos(t)$ et $t \to \sin(t)$. Et alors le Wronskien est simple et son déterminant vaut toujours 1. Inverser le système d'ordre 2 est aisé et on trouve $\lambda_1'(t) = -cy_2$ et $y_2' = cy_1$. Ainsi, on a des primitive de la forme

$$\lambda_1(t) = -\int_{t_0}^{t} c(s)\sin(s)\,ds, \qquad \text{et} \qquad \lambda_2(t) = \int_{t_0}^{t} c(s)\cos(s)\,ds,$$

et donc une solution particulière de la forme souhaitée,

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} c(s)\big[-\sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t)\big]\,ds.$$

Exercice 2.

a) On se donne $\rho \in \mathbb{C}$ et P un polynôme (complexe ou réel) de degré k. Montrer qu'il existe une solution particulière de l'équation

$$y''(t) + y(t) = e^{\rho t}P(t)$$

de la forme

$$y(t) = e^{\rho t}\tilde{P}(t)$$

où $\tilde{P}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à k si $\rho \notin \{-i, i\}$ et de degré inférieur ou égal à $k+1$ si $\rho = \pm i$.

b) Donner les solutions de l'équation

$$y''(t) + y(t) = \cos^3(t/3).$$

(On pourra chercher à superposer les solutions de deux équations).

Solution de l'exercice 2.
1) On procède par variation des constantes. On cherche une solution sous la forme $y(t) = \lambda_1(t)e^{it} + \lambda_2(t)e^{-it}$, et les fonctions λ_1, λ_2 qui vérifient $y'(t) = i\lambda_1(t)e^{it} - i\lambda_2(t)e^{-it}$ et $y''(t) = (i)^2\lambda_1 e^{it} + i\lambda_1'(t)e^{it} + (-i)^2\lambda_2 e^{-it} - i\lambda_2'(t)e^{-it}$. On obtient donc $\lambda_1'(t) = -\frac{i}{2}P(t)e^{\rho t}e^{-it}$ et $\lambda_2'(t) = \frac{i}{2}P(t)e^{\rho t}e^{it}$. Il est facile (classique ?) de voir qu'une fonction de la forme $t \to Q(t)e^{\alpha t}$, pour Q un polynôme et α un nombre complexe, admet une primitive de la forme $t \to \tilde{Q}(t)e^{\alpha t}$ avec Q et $\tilde{Q}$ de même degré si α et non nul (et si $\alpha = 0$ c'est la primitive d'un polynôme, qui augmente le degré de 1, donc). Traitons d'abord le cas où $\rho \notin \{-i, i\}$. Alors, la méthode de variations des constantes ci-dessous permet de dire qu'il existe des polynômes Q_1 et Q_2 de degré k (obtenus en prenant des primitives de λ_1 et λ_2)

tels que la fonction $y(t) = Q_1(t)e^{(\rho-i)t}\, e^{it} + Q_2(t)e^{(\rho+i)t}\, e^{-it} = (Q_1(t) + Q_2(t))e^{\rho t}$, ce qui répond à la question puisque le degré de $Q_1 + Q_2$ est inférieur ou égal à k. Regardons le cas $\rho = -i$ (le cas $\rho = i$ se traite de la même manière). Alors la méthode de variation des constantes nous donne une solution de la forme $y(t) = Q_1(t)e^{-2it}\, e^{it} + Q_2(t)\, e^{-it} = (Q_1(t) + Q_2(t))e^{-it}$ avec Q_1 de degré inférieur à k et Q_2 de degré égal à $k+1$.
2) On cherche à résoudre

$$y'' + y = \frac{1}{4}(\cos(t) + 3\cos(t/3)) = \frac{1}{8}\Big(e^{it} + e^{-it} + 3e^{it/3} + 3e^{-it/3}\Big).$$

Plus précisément, on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre, puisqu'on connait déjà les solutions de l'équation homogène. On va le faire en superposant les solutions des quatre équations avec second membre apparaissant dans la somme ci-dessus.
Pour le second membre e^{it} on cherche donc une solution particulière sous la forme $y(t) = (at + b)e^{it}$. On cherche donc à résoudre $e^{it} = y'' + y = 2iae^{it}$, ce qui admet comme solution $a = 1/(2i)$. Une solution particulière est donc de la forme $y(t) = \frac{1}{2i}(t + c)e^{it}$ pour n'importe quelle constante $c \in \mathbb{C}$. Le même calcul avec e^{-it} comme second membre donne comme solution particulière $y(t) = -\frac{1}{2i}(t+c)e^{-it}$. On obtient donc une solution particulière de l'équation

$$y'' + y = \cos(t)$$

de la forme

$$y = t\sin(t)/2.$$

Passons au second membre $e^{it/3}$. Comme $i/3$ est différent de i, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y(t) = \lambda e^{it/3}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Le calcul montrer que $\lambda = 9/8$ convient. On fait la même chose pour le second membre $e^{-it/3}$. On trouve ainsi une solution particulière de

$$y'' + y = \cos(t/3)$$

de la forme

$$y = \frac{9}{8}\cos(t/3).$$

Ainsi, en superposant les solutions des équations précédentes, on trouve une solution particulière de

$$y'' + y = \cos^3(t/3).$$

de la forme

$$y(t) = \frac{1}{32}\big(4t\sin(t) + 27\cos(t/3)\big).$$

L'ensemble des solutions est l'espace affine de dimension deux formé des fonctions de la forme

$$y(t) = a\cos(t) + b\sin(t) + \frac{1}{32}\big(4t\sin(t) + 27\cos(t/3)\big), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. (Variation de la constante) Soit l'équation différentielle du second ordre

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose qu'on connaît une solution $u(x)$ de l'équation, non indentiquement nulle. Montrer comment trouver une autre solution indépendante de la première en la cherchant sous la forme $y(x) = c(x)u(x)$.

Solution de l'exercice 3. On pose $y(x) = c(x)u(x)$. L'inconnue est maintenant la fonction $c(x)$. On a

$$\begin{aligned} y'(x) &= c(x)u'(x) + c'(x)u(x) \\ y''(x) &= c(x)u''(x) + 2c'(x)u'(x) + c''(x)u(x) \end{aligned}$$

En injectant dans l'équation différentielle on obtient

$$\begin{aligned}
c(x)u''(x) + 2c'(x)u'(x) + c''(x)u(x) + a(x)\big(c(x)u'(x) + c'(x)u(x)\big) + b(x)c(x)u(x) &= 0 \\
c(x)\big(u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x)\big) + c'(x)\big(2u'(x) + a(x)u(x)\big) + c''(x)u(x) &= 0 \\
c'(x)\big(2u'(x) + a(x)u(x)\big) + c''(x)u(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Posons l'inconnue auxilliaire $\phi(x) = c'(x)$. Elle vérifie l'équation

$$\phi'(x)u(x) = -\phi(x)\big(2u'(x) + a(x)u(x)\big).$$

Sur un intervalle $[x_0, x]$ où $u(s) \neq 0$ on peut intégrer cette équation par séparation des variables

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} ds &= \int_{x_0}^{x} \frac{2u'(s) + a(s)u(s)}{u(s)} ds \\
&= \int_{x_0}^{x} \big(\frac{2u'(s)}{u(s)} + a(s)\big) ds \\
\log\big(\frac{|\phi(x)|}{|\phi(x_0)|}\big) &= 2\log\big(\frac{|u(x)|}{|u(x_0)|}\big) + \int_a^x a(s)ds.
\end{aligned}$$

On peut ensuite intégrer $\phi(x)$ pour obtenir $c(x)$. Ainsi, sur un intervalle où u ne s'annule pas, on voit (en remontant les calculs ci-dessus) que la fonction $x \to c(x)u(x)$ est, pour le choix ci-dessus de c, une autre solution de l'équation. Attention, il reste à prouver que cette solution est indépendante de la précédente. Le déterminant Wronskien W des solutions u et cu vaut

$$W(t) = c'(t)u^2(t),$$

qui est non-nul d'après l'hypothèse faite sur u et la construction de $c' = \phi$ ci-dessus. Ainsi, les deux solutions sont bien indépendantes.
Cette méthode est théorique. Parfois ça permet une résolution de l'équation, parfois non.

Exercice 4. On considère l'équation

$$y'' - 2y' + y = 0 \tag{$*$}$$

Trouver les solutions de cette équation par les méthodes suivantes :
– En revenant au système différentiel d'ordre 1
– En utilisant la méthode de variation de la constante décrite à l'exercice précédent.

Solution de l'exercice 4. Le système correspondant sur $\mathbb{R}^2$ est

$$X(t) = AX(t)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On voit que la matrice A n'admet qu'une valeur propre (valeur propre double, donc), égale à 1. Le cours nous dit que les solutions de $(*)$ sont

$$y(t) = (at + b)e^t \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Retrouvons ici ce résultat sans faire appel au cours. On sait que A n'est pas diagonalisable (OK ?). Par contre, il est facile de la triangulariser. On voit que $A(e_1 + e_2) = e_1 + e_2$, donc on prend la base $v_1 = e_1 + e_2$ et $v_2 = e_1$, de sorte que $Av_2 = -e_2 = -e_1 - e_2 + e_1 = -v_1 + v_2$. La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et dans la nouvelle base on a
$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Le calcul de l'exponentielle de $\tilde{A}$ est aisé et on trouve
$$e^{t\tilde{A}} = \begin{pmatrix} e^t & -te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = P^{-1}e^{tA}P.$$
Par conséquent les solutions du système sont de la forme, pour $Z_0 = P^{-1}X(0) \in \mathbb{R}^2$,
$$X(t) = e^{tA}X(0) = Pe^{t\tilde{A}}P^{-1}X(0) = Pe^{t\tilde{A}}Z_0 = \left(\begin{array}{cc} e^t & (1-t)e^t \\ e^t & -te^t \end{array} \right) Z_0$$
On trouve donc que les solution de $(*)$ sont de la forme
$$y(t) = \alpha e^t + \beta(1-t)e^t = \big[-\beta t + (\alpha+\beta)\big]e^t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$
ce qui donne bien le même espace de dimension 2 que précédemment.
Essayons maintenant avec la méthode de variation d'une constante. L'équation caractéristique admet 1 comme racine double égale à 1, et on voit donc que $y(t) = e^t$ est *une* solution de l'équation. On cherche une autre solution sous la forme $y(t) = c(t)e^t$. On a
$$y'' - 2y' + y = c''(t)e^t$$
On voit donc que si c est un polynôme de degré un, alors $t \to c(t)e^t$ est une solution de l'équation. En particulier, $\{e^t, te^t\}$ forme une base de solutions (on a bien qu'elles sont indépendantes).

Exercice 5.

a) Déterminer la solution du problème
$$\begin{cases} y' = Ay, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Mettre l'équation $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ sous la forme d'un système linéaire du premier ordre. Comment s'appelle la matrice obtenue ? Déterminer son polynôme caractéristique puis l'espace des solutions de l'équation.

Solution de l'exercice 5.

a) On sait que la solution est $e^{tA}y_0$, il s'agit donc à chaque fois de calculer une exponentielle de matrice.
La première matrice est diagonalisable de valeur propre $1, -3$, et de vecteurs propres associés $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_{-3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice de passage est donc $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{4}\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{array} \right)$, et
$$e^{tA} = P\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}P^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 2e^t & -2e^{-3t} \\ e^t & e^{-3t} \end{array} \right)P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2e^t + 2e^{-3t} & 4e^t - 4e^{-3t} \\ e^t - e^{-3t} & 2e^t + 2e^{-3t} \end{pmatrix}$$
On rappelle qu'il n'est pas nécessaire d'inverser P pour avoir une base de solution ; ici
$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} -2e^{3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} = e^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve de même pour la deuxième matrice i et $-i$ pour valeurs propres, et comme matrice de passage $P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ avec $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. Tous calculs faits on trouve

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Remarque : comme dans ce cas tA est une matrice antisymétrique réelle, on savait déjà que e^{tA} était une matrice orthogonale, et même dans SO_2 (i.e. une rotation).

On remarque que la dernière matrice est la somme de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et de la matrice nilpotente $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la formule du binôme donne

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + n2^{n-1}N + 0 = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

de sorte que

$$e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{(tA)^n}{n!} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

On pouvait aussi remarquer que comme $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$ et la matrice nilpotente $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent, on a

$$e^{tA} = e^{2t}e^{tN} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) On pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$, le vecteur Y satisfait manifestement

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2. \end{pmatrix} Y.$$

La matrice est dite matrice *compagnon* du polynôme $x^3 - 2x^2 - x + 2$, et (comme pour toute matrice compagnon) son polynôme caractéristique est ce polynôme. Les racines du polynôme sont $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, 1, 2)$. La matrice se diagonalise donc sous la forme $P\mathrm{diag}(-1, 1, 2)P^{-1}$, et on en déduit que les solutions sont de la forme $P\mathrm{diag}(e^{-t}, e^t, e^{2t})P^{-1}Y_0$. En particulier l'espace des solutions est engendré par les fonctions (e^{-t}, e^t, e^{2t}), toute solution s'écrit sous la forme $y(t) = \alpha e^{-t} + \beta e^t + \gamma e^{2t}$.

Exercice 6.

Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Donnez les solutions $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ du système

$$X'(t) = A(t)X(t).$$

b) Calculer

$$e^{\int_0^t A(s)\,ds}.$$

c) Comparer et commenter les résultats des deux questions précédentes.

Solution de l'exercice 6. Il s'agit d'un système linéaire à coefféficient variable. Les coefficients de A étant continus sur $\mathbb{R}$, on sait que pour toute donnée X_0 en $t_0 \in \mathbb{R}$ (par exemple $t_0 = 0$), il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$. L'espace des solution forme un espace vectoriel de dimension 2.
Concrètement, on doit donc résoudre

$$\begin{cases} x'(t) = & tx(t) + y(t) \\ y'(t) = & 0 \end{cases}$$

La seconde équation donne que y est constant, soit $y(t) = \alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. La solution de l'équation homogène en x, $x' = tx$, admet comme solution $x(t) = Ke^{t^2/2}$ et on trouve donc, par variation de la constante que x est de la forme

$$x(t) = \Big(\alpha \int_0^t e^{-s^2/2}\, ds + \beta\Big) e^{t^2/2}, \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

Ainsi, les solution du système s'écrivent sous la forme

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \int_0^t e^{-s^2/2}\, ds \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \int_0^t e^{-s^2/2}\, ds & e^{t^2/2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Remarquez que $X(0) = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ de sorte que l'expression précédente donne directement la solution en fonction de la valeur en 0 :

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & e^{t^2/2} \int_0^t e^{-s^2/2}\, ds \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(0).$$

Par ailleurs on a

$$\int_0^t A(s)\, ds = \begin{pmatrix} t^2/2 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad e^{\int_0^t A(s)\, ds} = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & e^t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On constate que les solutions du système ne sont pas données par l'exponentielle de la primitive de A :

$$X(t) \neq e^{\int_0^t A(s)\, ds} X(0).$$

Cela ne doit pas surprendre outre mesure : la famille des matrices $A(t)$ ne commute pas pour des valeurs distinctes de t.

Exercice 7. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = tx(t) - y(t), \\ y'(t) = x(t) + ty(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

a) Pour $T > 0$, justifier que ce système admet une solution unique sur $[0, T]$.

b) Calculer les valeurs propres de la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$. Diagonaliser $A(t)$ (on remarquera qu'on peut choisir une matrice de passage P indépendante de t), vérifier que pour $(s,t) \in \mathbb{R}$, $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. Déterminer les valeurs propres de

$$M(t) = \int_0^t A(s) ds, \quad \text{où } M_{ij}(t) = \int_0^t A_{ij}(s) ds.$$

c) Déterminer la solution. On pourra utiliser la question précédente, ou trouver une équation différentielle satisfaite par $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Solution de l'exercice 7.

a) Le système se met sous la forme $U'(t) = A(t)U(t)$ avec $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$. C'est un système linéaire à coefficients variables, la matrice A est $C^\infty([0,T])$, le théorème de la section "systèmes linéaires à coefficients variables" s'applique donc.

b) Le polynôme caractéristique de $A(t)$ est $(t-X)^2+1 = X^2-2tX+t^2+1$, ses racines sont $\lambda_{pm} = t \pm i$, le calcul des vecteurs propres fournit la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, pour laquelle

$$P^{-1}A(t)P = \begin{pmatrix} t+i & 0 \\ 0 & t-i \end{pmatrix}$$

Comme P ne dépend pas de t les matrices $A(t)$ et $A(s)$ sont simultanément diagonalisables, donc commutent (on peut aussi faire le calcul directement).
Les valeurs propres de M sont les intégrales des valeurs propres de A car

$$\begin{aligned} M(t) = \int_0^t P \begin{pmatrix} s+i & 0 \\ 0 & s-i \end{pmatrix} P^{-1} ds &= P \int_0^t \begin{pmatrix} s+i & 0 \\ 0 & s-i \end{pmatrix} ds P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} t^2/2+it & 0 \\ 0 & t^2/2-it \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

c) <u>Comme $A(t)A(s) = A(s)A(t)$</u>, la solution est donnée par $e^{M(t)} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, c'est à dire

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{t^2/2+it} & 0 \\ 0 & e^{t^2/2-it} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = e^{t^2/2} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

En passant par $z = x+iy$, on remarque que $z' = (t+i)z$, donc $z(t) = e^{t^2/2+it}z(0)$, comme $z(0) = x_0 + iy_0$, on vérifie facilement que les deux méthodes donnent la même solution.

Exercice 8. Calculer e^{tA} pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pourra écrire A sous la forme $I + N + N^2$ pour une matrice N (nilpotente) bien choisie.

Solution de l'exercice 8.
Posons

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on voit que $A = I+N+N^2$ et que $N^3 = 0$. Par ailleurs, comme les puissances de N commutent deux à deux, on a

$$e^{tA} = e^t e^{tN} e^{tN^2}.$$

Comme $N^3 = 0$ on a

$$e^{tN} = I + tN + t^2N^2/2 \quad \text{et} \quad e^{tN^2} = I + tN^2.$$

On trouve donc

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & (t+t^2/2)e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$