Feuille de TD 4

Exercice 1. Reprendre l'exercice 2 de la feuille 1 de manière rigoureuse. Concrètement, pour chacune des équations différentielles suivantes

a) $y'(t) = ty(t)$,
b) $ty'(t) = y(t)$,
c) $y'(t) = y^2(t)$,
d) $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$

indiquer, en fonction de la condition initiale, si un théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, et déterminer le cas échéant la solution maximale.

Solution de l'exercice 1.

a) L'application $(t, x) \to tx$ est globalement Lipschitzienne en x avec une constante de Lipschitz uniforme pour $t \in [-T, T]$, T arbitraire fixé, mais pas uniformément pour $t \in R$ puisqu'elle est t-Lipschitzienne. Le théorème de Cauchy-Lipschitz global donne une solution unique sur $[-T, T]$ quel que soit T, donc sur $]-\infty, \infty[$.

Regardons le problème de Cauchy $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$. Si $x_0 = 0$, alors on voit que la fonction identiquement nulle est solution sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de CL, c'est donc la seule solution de l'équation qui peut s'annuler : toute solution sur un intervalle I qui n'est pas identiquement nulle ne s'annulera pas sur I.

Pour $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ fixé, le calcul fait à la feuille 1 montre alors que la fonction $x(t) = x_0 e^{-t_0^2/2}\, e^{t^2/2}$ est là solution locale (atour de t_0) pour le problème de Cauchy $x(t_0) = x_0$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et elle est une solution sur $\mathbb{R}$ (donc maximale) du problème de Cauchy.

Mais mais... que fait-on ici ? STOP ! L'équation $x' - tx = 0$ rentre dans la catégorie des équation LINÉAIRES d'ordre à coefficient C^∞ (donc continu sur $\mathbb{R}$). Donc on sait bien qu'il existe une solution sur $\mathbb{R}$ tout entier pour tout problème de Cauchy, et que les solutions forment un espace vectoriel de dimension 1.

b) En principe, on doit étudier l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ et se poser, éventuellement, le problème de recoller des solutions. IcI encore, l'équation $x' - \frac{1}{t}x = 0$ est une équation linéaire à coefficient continu sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$. Oublions cela provisoirement.

L'application $(t, x) \to x/t$ n'est pas définie pour $t = 0$, elle est globalement $1/\varepsilon$-Lipschitzienne en x uniformément pour $|t| \geq \varepsilon > 0$, le théorème de Cauchy Lipschitz (global) donne alors l'existence d'une unique solution sur les intervalles de la forme $[\varepsilon, +\infty[$ et $]-\infty, -\varepsilon]$. Et donc, cela garanti l'existence de solutions maximales sur $]-\infty, 0[$ (respectivement sur $]0, +\infty[$) au problème de Cauchy pour $x(t_0) = x_0$ pour $x_0 \in R$ et $t_0 < 0$ (respectivement $t_0 > 0$). Et comme précédemment, comme la fonction identiquement nulle est solution, c'est la seule solution qui s'annule pour tout problème de Cauchy sur $]-\infty, 0[$.

En fait, pour $t_0 \neq 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $x(t) = \frac{x_0}{t_0}t$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ tout entier du problème de Cauchy associé à $x(t_0) = x_0$.

Dans le cas où $t_0 = 0$, on ne peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipshitz. Dans ce cas, il y a une infinité de solutions si $x_0 = 0$, et aucune si $x_0 \neq 0$.

c) Enfin un exemple non-linaire ! L'application $(t, x) \to x^2$ est localement lipschitzienne en x, évidemment uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. Seul le théorème de Cauchy Lipschitz local s'applique. Par ailleurs, la fonction identiquement nulle est solution. Donc si x est une solution sur I, soit elle est identiquement nulle, soit elle ne s'annule pas sur I, ce qui justifie les calculs fait à la feuille 1.

Donnons-nous $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 > 0$. Alors on a vu à la feuille 1 que $x(t) = -\frac{1}{C_0 - t}$ est une solution sur $]0, C_0[$ à l'équation avec $x(t_0) = x_0$ en prenant $C_0 := t_0 - \frac{1}{x_0} > t_0$. Ainsi, c'est LA solution maximale à ce problème.

d) L'application $(t,x) \to \sqrt{|x|}$ n'est pas localement lipschitzienne en x (sa dérivée n'est pas bornée en 0), ce qui explique l'existence de deux solutions différentes au problème de Cauchy $x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$, $x(0) = 0$ (par exemple 0 et $t|t|/4$). Le théorème de Cauchy Lipschitz ne s'applique pas pour des données initiales nulles.
Par contre, $(t,x) \to \sqrt{|x|}$ est localement lipschitzienne en x uniformément en t sur tout $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$. Ainsi, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 > 0$, on aura une unique solution locale autour de t_0. Par contre, on a vu qu'on peut construire plusieurs solutions (maximales) sur $\mathbb{R}$, ce qui est dû encore une fois à l'absence de théorème de CL pour $x = 0$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-tx(t)}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{E}$$

a) Peut on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz global pour avoir l'existence d'une solution $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

b) Justifier qu'on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz global pour $y'(t) = e^{-|ty(t)|}$, $y(0) = 0$.

c) Justifier que $\text{signe}(y(t)) = \text{signe}(t)$.

d) En déduire que y est une solution de (E).

Solution de l'exercice 2.
a) On va vérifier que l'on a pas les hypothèse de CL global sur $\mathbb{R}$. Soit don c $f(t,x) = e^{-tx}$. C'est une fonction C^1 des deux variables sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, par théorèmes d'opérations. On a $\partial_x f(x,t) = -te^{-tx}$, donc la constante de Lipsthitz globale en x, vaut zéro (pour n'importe quel t fixé dans $\mathbb{R}$, et a fortiori, uniformément en t). On ne peut donc pas appliquer un théorème de Cauchy-Liptschitz global, ni sur $\mathbb{R}$, ni sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
b) On pose $g(t,x) = e^{-|tx|} = e^{-|t|\,|x|}$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, par théorème d'opérations. La fonction $s \to e^{-s}$ est 1-lipschitzienne pour $s > 0$, et la fonction $x \to |t|\,|x|$ est $|t|$-lipschtzienne. Par composition, on voit que on voit que g est $|t|$-lipschtzienne en x pour t fixé :

$$|g(t,x) - g(t,z)| \ \le |t|\ |x - z|.$$

On a pas de caractère uniformément-lipschtzien pour t dans $\mathbb{R}$, mais on en a pas besoin. En fait, on voit que pour $T > 0$, la fonction g est globalement lipschtzienne en x, uniformément en $t \in [-T, T]$. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz global sur $[-T, T]$. On a donc une solution du problème de Cauchy sur $[-T, T]$, et ceci pour tout T. On a donc bien une solution (unique) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 3. En prenant en compte la gravité et la résistance de l'air, la chute d'un objet peut se modéliser par l'équation différentielle suivante

$$mh''(t) = -mg + \alpha\,(h'(t))^2.$$

a) Indiquer les données de Cauchy pour un objet lâché à $t = 0$ d'une hauteur h_0 sans vitesse initiale.

b) Justifier que le problème admet une unique solution locale.

c) Notons h la solution (locale) maximale définie sur un intervalle $[0, T[$ avec $T \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Démontrer, sans calculer cette solution, que

   i) La dérivée $v := h'$ est croissante et bornée

ii) Que la fonction maximale est définie sur $\mathbb{R}^+$ (i.e. $T = +\infty$) et que v une valeur limite en $+\infty$ que l'on calculera.

d) Calculer la solution explicite et vérifier la question 3.

Solution de l'exercice 3.

a) La hauteur à $t = 0$ est h_0, la vitesse initiale est nulle, les données de Cauchy sont donc $h(0) = h_0,\ h'(0) = 0$.

b) L'équation différentielle se met sous la forme du système

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -g + \alpha\, y_2^2/m \end{pmatrix}.$$

La fonction $F(t, y_1, y_2) = (y_2, -g + \alpha y_2^2/m)$ est C^∞, donc localement Lipschitzienne (uniformément en t car indépendante de t), le théorème de Cauchy-Lipschitz (local) s'applique donc. L'existence d'une solution locale pour le système garanti une solution h à notre équation sur un certain intervalle de la forme $[0, T[$ avec $h(0) = h_0$ et $h'(0) = 0$).

c) La vitesse $v = h'$ est solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$v'(t) = -g + \frac{\alpha}{m} v(t)^2.$$

Le théorème de Cauchy-Liptchitz, qui s'applique sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, garanti une solution locale (maximale) sur $I = [0, T_0[$ avec $v(0) = 0$, et en fait $T_0 \leq T$ car une fois v connu, on peut retrouver h par $h(t) = h_0 + \int_0^t v$.
Cette équation a deux solutions stationnaires $v_+ = \sqrt{mg/\alpha}$ et $v_- = -\sqrt{mg/\alpha}$. En particulier, par unicité (Cauchy-Lipschitz local), notre fonction v est comprise entre ces deux solutions, i.e. $v(t) \in]v_-, v_+[$ pour tout $t \in I$. On voit que sur I la fonction v est décroissante, puisque $v(t) \leq v_+ \Rightarrow v'(t) \leq 0$, et comme elle est minorée, elle a une limite finie en T_0. Supposons T_0 fini ; alors on peut prolonger v par continuité en T_0 en posant $v(T_0) = \lim_{T_0^-} v \in \mathbb{R}$. De plus, on tire de l'équation que v' a aussi une limite (à gauche) en T_0. Il découle du théorème des accroissements finis (point subtil...) que v est dérivable à gauche en T_0 avec $v'(T_0) = \lim_{T_0^-} v' = -g + \frac{\alpha}{m} v(T_0)^2$. Ainsi, v est C^1 sur $[0, T_0]$ et vérifie l'équation différentielle sur cet intervalle. Mais, on peut aussi appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz (local) autour de T_0 avec $v(T_0)$ comme valeur en T_0 ; ainsi, la solution obtenue prolonge v à droite de T_0 (en effet, à gauche elle coïncide par unicité de la solution qui vaut $v(T_0)$ en T_0). Cela contredit le fait que v était la solution maximale. On conclut donc que $T_0 = +\infty$ et donc par intégration $T = +\infty$. On a bien une solution en tout temps.
On a donc v décroissante minorée sur $\mathbb{R}^+$, et donc v a une limite $\ell \in [v_-, v(0)]$ en $+\infty$. Cela entraine que $v'(t)$ tend vers $-g + \frac{\alpha}{m}\ell^2$ en $+\infty$. Le fait que v ait une limite finie implique que la suite $v(n+1) - v(n)$ tend vers zero quand $n \to +\infty$; mais le théorème des accroissement finis et le fait que v' ait une limite entraine que $v(n+1) - v(n) \to -g + \frac{\alpha}{m}\ell^2$. On en tire que $\ell^2 = mg/\alpha$ et donc que $\ell = v_- = -\sqrt{mg/\alpha}$. On a donc, en $+\infty$, $v \to -\sqrt{mg/\alpha}$ et $v' \to 0$. D'un point de vue physique, la vitesse de chute tend vers une vitesse limite où l'accérélation de la gravité et le freinage de l'air s'équilibrent parfaitement.

d) L'équation en v est une équation différentielle à variables séparées, on peut l'intégrer directement, puisqu'on sait par Cauchy-Lipshitz (local) que toute solution locale avec $v(0) \in]v_-, v_+[$ restera, là où elle définie, dans cet intervalle. Le calcul au brouillon donne

$$\frac{v'}{-g(1 - (v/v_+)^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2gv_+} \ln\left(\frac{1 - v/v_+}{1 + v/v_+}\right) = t \Rightarrow v = -v_+ \frac{1 - e^{-2gt/v_+}}{1 + e^{-2gt/v_+}},$$

ou encore

$$v = -v_+ \tanh(gt/v_+).$$

qui est bien C^1 et définie sur $\mathbb{R}_+$ tout entier. La fonction tanh est une fonction croissante de limite 1 en $+\infty$, on retrouve donc bien le résultat de la question précédente.

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ par $f(t,y)=\frac{\cos(y)}{t}$. On se donne $t_0>0$ et $y_0\in\mathbb{R}$ et on considère le problème de Cauchy suivant sur $]0,+\infty[$:

$$y'(t)=f(t,y(y))=\frac{\cos(y(t))}{t}\,,\qquad y(t_0)=y_0. \tag{E}$$

a) Montrer qu'il existe une solution globale $y:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ au problème (E).
b) Montrer que cette solution est bornée.
c) Montrer que si $y_0\in]-\pi/2,\pi/2[$, cette solution est strictement croissante. Montrer ensuite qu'elle tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

Solution de l'exercice 4.
a) La fonction f est C^1 des deux variables, ce qui permet de garantir une solution *locale* pour tout problème de Cauchy.
Ici on a un peu mieux. Soit $[a,b]\subset]0,+\infty[$ un segment quelconque contenant t_0, alors f est lipschitzienne en y uniformément en t sur $[a,b]\times\mathbb{R}$; en effet, on a pour $t\in[a,b]$ et $y\in\mathbb{R}$,

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\Big|\ \le\Big|\frac{\sin(y)}{t}\Big|\ \le\frac{1}{|t|}\ \le\frac{1}{a}$$

Le théorème de Cauchy-Lipshitz global garanti donc une existence d'une solution sur $[a,b]$, pour tout $[a,b]$ contenant t_0. Ainsi, la solution maximale est définie sur $]0,+\infty[$.
b) Introduisons $n_0\in\mathbb{Z}$ tel que $y_0\in[-\frac{\pi}{2}+n_0\pi,\frac{\pi}{2}+n_0\pi[$. On remarque que les fonctions constantes $t\to\frac{\pi}{2}+k\pi$ (pour n'importe quel $k\in\mathbb{Z}$) sont des solutions (maximales) de $y'(t)=\frac{\cos(y)}{t}$. Par l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, si deux solutions de $y'(t)=\frac{\cos(y)}{t}$, $t>0$, se coupent en un point, elles sont égales sur $]0,+\infty[$ tout entier. Ainsi, soit $y_0=-\frac{\pi}{2}+n_0\pi$ auquel cas la solution y est constante (donc bornée), soit $y_0\in]-\frac{\pi}{2}+n_0\pi,\frac{\pi}{2}+n_0\pi[$, auquel cas on a $y(t)\in]-\frac{\pi}{2}+n_0\pi,\frac{\pi}{2}+n_0\pi[$ pour tout $t>0$.
c) Si $y_0\in]-\pi/2,\pi/2[$, alors on sait, d'après le raisonnement fait à la question précédente, que la solution y reste dans $]-\pi/2,\pi/2[$. Sur cet intervalle, la fonction cosinus est strictement positive, ce qui garanti que y' est strictement positive, et donc que la fonction y strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Ainsi, y admet une limite finie $\ell\in]-\pi/2,\pi/2]$, en tant que fonction croissante majorée. Et alors, par l'équation, y' tend vers 0 en $+\infty$. On peut dire mieux. Pour $t>1$, on a, puisque $\cos(y)$ reste positif, et plus grand que $\min\big(\cos(\ell),\cos(y_0)\big)$,

$$\begin{aligned} y(t)-y(1)=\int_1^t y'=\int_1^t\frac{\cos(y(s)}{s}\,ds\ &\ge\ \min\big(\cos(\ell),\ \cos(y_0)\big)\int_1^t\frac{ds}{s}\\ &=\ \min\big(\cos(\ell),\cos(y_0)\big)\log(t)\ge 0,\end{aligned}$$

Mais comme y a une limite finie, elle est bornée, ce qui n'est possible que si $\cos(\ell)=0$, soit $\ell=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 5. Soit la fonction f définie pour $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ par

$$f(t,x)=\left\{\begin{array}{l} 2t\sin\left(\dfrac{\pi x}{2t^2}\right)\ \text{si } t\neq 0,\\ 0 \text{ si } t=0.\end{array}\right.$$

a) Montrer que que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et que pour tout $t\in\mathbb{R}$, l'application $x\to f(t,x)$ est globalement lipschitzienne.
b) Déterminer deux solutions “évidentes” de $x'(t)=f(t,x(t)),\ x(0)=0$. Commenter.

Solution de l'exercice 5.
a) La fonction est continue sur $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$ en tant que produit/composée de fonctions C^∞. Pour étudier la continuité sur la droite $\{0\}\times\mathbb{R}$, on se donne $(0,x_0)\in\mathbb{R}^2$; il faut vérifier que $\lim_{(t,x)\to(0,x_0)} f(t,x_0)=f(0,x_0)=0$.
Comme $|\sin(\cdot)|\le 1$ on a $|f(t,x)|\le 2|t|$. Si $(t,x)\to(x_0,0)$ en particulier $t\to 0$ donc $|f(t,x)|\le 2|t|\to 0$, et donc comme demandé $f(t,x)\to_{(0,x_0)} 0$.
Pour $t=0$, $f(x,0)=0$ est 0-Lipschitzienne en x.
Pour $t\neq 0$, comme sin est 1-Lipschitzienne, on a

$$|f(t,x)-f(t,y)|\le |2t|\frac{\pi}{2t^2}|x-y|=\frac{\pi}{|t|}|x-y|,$$

la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est donc $\pi/|t|$-Lipschitzienne.
b) Les fonction $t\mapsto 0$ et $t\mapsto t^2$ sont deux solutions évidentes. C'est un exemple de non unicité de solutions, le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'appliquait donc pas. Ici c'est le défaut d'uniformité sur la constante de Lipschitz qui fait échouer le théorème : l'application f doit être localement Lipschitzienne en x (ce qu'elle est bien), *uniformément* en t (ce qu'elle n'est pas).

Exercice 6. Soit $T>0$ fixé, on considère le problème de Cauchy

$$y'(t)=ty(t),\ t\in[0,T],\ y(0)=1.$$

a) Démontrer que le problème admet une unique solution et rappeler comment la méthode d'Euler permet d'en calculer une approximation. On prendra une discrétisation uniforme $h=T/N$.
b) Déterminer explicitement les approximations $y_n,\ n\ge 0$, et en déduire la formule

$$y(T)=\lim_{N\to\infty} P_N(T),\ \text{où } P_N(T)=\prod_{n=0}^{N-1}\left(1+\frac{nT^2}{N^2}\right).$$

c) Pour quels $x>0$ la fonction $g(\alpha)=(1+\alpha)^x$ est elle convexe ? En déduire le signe de $f(\alpha,x)=(1+\alpha)^x-1-\alpha x$ en fonction de x.
d) En déduire l'encadrement $\left(1+\dfrac{T^2}{N}\right)^{n/N}\le 1+\dfrac{nT^2}{N^2}\le\left(1+\dfrac{T^2}{N^2}\right)^n,\ 0\le n\le N-1.$
e) Déterminer $\lim_{N\to\infty}P_N(T)$ et en déduire $y(t)$.
f) Déterminer la limite en $+\infty$ de la solution de $y'=-ty(t), y(0)=1$. Peut on avoir la même limite pour les approximations $\widetilde{y_n}$?

Solution de l'exercice 6.
a) C'est une conséquence du théorème sur les systèmes linéaires à coefficients constants, puisque l'application $t\to t$ est bien une application continue $[0,T]\to M_{1,1}(\mathbb{R})$. La méthode d'Euler consiste à calculer une suite y_n définie par $y_0=y(0)$ et la relation de récurrence

$$y_{n+1}=y_n+ht_ny_n,\ t_n=nh=n\frac{T}{N}.$$

b) On a $y_{n+1}(1+t_nh)y_n=(1+nh^2)y_n=\left(1+\dfrac{nT^2}{N^2}\right)y_n$, de sorte que

$$y_n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{kT^2}{N^2}\right).$$

En particulier, la convergence de la méthode d'Euler implique

$$y(T)=y(t_N)=\lim_{N\to\infty}y_N=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}\left(1+\frac{nT^2}{N^2}\right).$$

c) Pour $0 \leq x \leq 1$ la fonction $\alpha \to (1+\alpha)^x$ est concave, donc $f \leq 0$. Pour $x > 0$, la fonction est convexe, donc $f \geq 0$.

d) En appliquant la question précédente avec $x = n/N \leq 1,\ \alpha = T^2/N$, on trouve

$$\left(1 + T^2/N\right)^{n/N} \leq 1 + n\frac{T^2}{N^2},$$

de même avec $x = n,\ \alpha = T^2/N^2$

$$1 + n\frac{T^2}{N^2} \leq \left(1 + \frac{T^2}{N^2}\right)^n.$$

e) Les inégalités précédentes donnent

$$\left(1 + \frac{T^2}{N}\right)^{\sum_0^{N-1} \frac{n}{N}} = \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{T^2}{N}\right)^{\frac{n}{N}} \leq y_N \leq \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{T^2}{N^2}\right)^n = \left(1 + \frac{T^2}{N^2}\right)^{\sum_0^{N-1} n},$$

or $\sum_0^{N-1} n = N(N-1)/2$ d'où

$$\left(1 + \frac{T^2}{N}\right)^{(N-1)/2} \leq y_N \leq \left(1 + \frac{T^2}{N^2}\right)^{N(N-1)/2}.$$

Par développement limité il vient $\left(1+\frac{T^2}{N}\right)^{(N-1)/2} = \exp\left(\frac{N-1}{2} \ln(1+T^2/N)\right) = \exp\Big(T^2/2+ O(1/N)\Big) \to e^{T^2/2}$ et de même $\lim_{N\to\infty} \left(1+\frac{T^2}{N^2}\right)^{N(N-1)/2} = e^{T^2/2}$. Par le théorème d'encadrement on en tire $y(T) = e^{T^2/2}$, et comme T est arbitraire la solution est la fonction $t \to e^{t^2/2}$.

f) L'équation est à variables séparables, on peut calculer directement sa solution $y(t) = e^{-t^2/2}y(0) = e^{-t^2/2}$, qui tend vers 0 en $+\infty$. On montre comme à la question 2 que l'approximation $\widetilde{y_n}$ vaut

$$\widetilde{y_n} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{kT^2}{N^2}\right).$$

Cette quantité est bien définie pour $n \in \mathbb{N}$ (et pas seulement $[|0, N|]$). On a pour le terme général du produit $1 - kT^2/N^2 \to_{k\to+\infty} -\infty$ de sorte que $|\widetilde{y_n}|$ diverge vers $+\infty$, sauf cas pathologique où il existe k tel que $1 - kT^2/N^2 = 0$. On voit donc que pour cet exemple l'approximation numérique n'a (presque) jamais le même comportement asymptotique que la solution exacte.