Feuille de TD 5

Exercice 1.

a) Montrer que le schéma d'Euler ne permet pas d'approcher la solution

$$y = \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}$$

du problème $y' = y^{1/3},\ y(0) = 0$. Expliquer.

b) Montrer que chacune des fonctions suivantes sont globalement lipschitziennes en y et donner une constante de Lipschitz uniforme en t pour les fonctions suivantes :

$$f(t,y) = \frac{2y}{t},\ t \geq 1,\ g(t,y) = \arctan(y),\ h(t,y) = \frac{(t^3-2)^{27}}{17t^2+4}.$$

c) Calculer explicitement les approximations $(y_n)_{0\leq n\leq N}$ obtenues par la méthode d'Euler pour le problème

$$y'(t) = \frac{2}{t}y(t),\ t \in [1, 1+T],\ y(1) = 1.$$

Évaluer l'erreur $e = \max\limits_{0\leq n\leq N} |y_n - y(t_n)|$, où $t_n = 1 + nT/N$

Exercice 2. Soit $T > 0$ fixé, on considère le problème de Cauchy

$$y'(t) = ty(t),\ t \in [0,T],\ y(0) = 1.$$

a) Démontrer que le problème admet une unique solution et rappeler comment la méthode d'Euler permet d'en calculer une approximation. On prendra une discrétisation uniforme $h = T/N$.

b) Déterminer explicitement les approximations $y_n,\ n \geq 0$, et en déduire la formule

$$y(T) = \lim_{N\to\infty} P_N(T),\ \text{où } P_N(T) = \prod_{n=0}^{N-1}\left(1 + \frac{nT^2}{N^2}\right).$$

c) Pour quels $x > 0$ la fonction $g(\alpha) = (1+\alpha)^x$ est elle convexe ? En déduire le signe de $f(\alpha, x) = (1+\alpha)^x - 1 - \alpha x$ en fonction de x.

d) En déduire l'encadrement $\left(1 + \frac{T^2}{N}\right)^{n/N} \leq 1 + \frac{nT^2}{N^2} \leq \left(1 + \frac{T^2}{N^2}\right)^n,\ 0 \leq n \leq N-1.$

e) Déterminer $\lim_{N\to\infty} P_N(T)$ et en déduire $y(t)$.

f) Déterminer la limite en $+\infty$ de la solution de $y' = -ty(t), y(0) = 1$. Peut on avoir la même limite pour les approximations $\widetilde{y_n}$? Comparer avec l'exercice **??**.

Exercice 3. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -10\big(y((t) - t^2\big) + 2t,\ t \in [0,T]. \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

a) Déterminer la solution, écrire le schéma d'Euler explicite avec $T = 1$.

b) Montrer que l'erreur $e = y(t_n) - y_n$ satisfait la relation de récurrence

$$e_{n+1} = (1 - 10h)e_n + h^2.$$

Calculer explicitement e_n.

c) Écrire le script scilab correspondant et comparer graphiquement la solution exacte avec la solution approchée.

d) Refaire l'analyse précédente pour l'équation $y'(t) = 10(y(t) - t^2) + 2t$. Dans l'approximation numérique, à h fixé augmenter T. Qu'observe-t-on ? Interpréter.

Exercice 4. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ t \in [0, T] \\ y(0) = y_v 0. \end{cases}$$

On approche la solution de ce problème avec le *schéma de Heun* : pour $N \in \mathbb{N}^*$ on pose $h = T/N$, $t_n = hn$ et on définit y_n par

$$y_0 = {y_0}^1, \ \forall\, 0 \le n \le N-1, \begin{cases} y^*_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\Big[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y^*_{n+1})\Big]. \end{cases}$$

a) Montrer que c'est un schéma explicite à un pas.

b) On suppose que la fonction f est lipschitzienne en y, uniformément en $t \in [0, T]$. Montrer que le schéma est stable.

c) Montrer que le schéma est consistant. On donnera une estimation de l'erreur de consistance en précisant la régularité nécessaire sur f.

d) Montrer que le schéma est d'ordre 2, i.e. il existe C_T telle que

$$\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)| \le C_T h^2.$$

1. Sic !