Feuille de TD 6

Exercice 1. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = te^{-y(t)}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que l'équation a une solution unique sur $\mathbb{R}^+$.

b) Écrire le schéma d'Euler implicite pour calculer une approximation de la solution.

c) Expliciter la fonction $\varphi(x)$ telle qu'à chaque pas de temps, le schéma d'Euler implicite conduise à résoudre $\varphi(x) = x$.

d) Écrire l'algorithme du point fixe pour résoudre cette équation et donner une condition sur le pas de discrétisation h pour que cet algorithme converge.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ et que f, $D_x f$ et $D_x^2 f$ sont bornées sur $\mathbb{R}^N$. On muni $\mathbb{R}^N$ d'une norme $||\ .\ ||$ et on note $|||\ .\ |||$ la norme induite sur l'espace vectoriel des matrices $N \times N$.
On considère enfin le schéma suivant

$$(I_N - \frac{h}{2}A_n)x^{n+1} = x^n + hf(x^n) - \frac{h}{2}A_n x^n, \qquad x^0 = x_h^0 \in \mathbb{R}^N \text{ donné} \tag{2}$$

où A_n est la matrice carrée $N \times N$ définie par

$$A_n = D_x f(x^n).$$

a) Ecrire le schéma sous la forme
$$x^{n+1} = x^n + h\Phi(x^n; h)$$
et identifier $\Phi(x; h)$ en utilisant la matrice
$$B(x) = \Big(I - \frac{h}{2}D_x f(x)\Big)^{-1}.$$

b) Montrer que pour $h < h_0$ (et on calculera explicitement h_0 indépendant de x) $I - \frac{h}{2}D_x f(x)$ est inversible et $B(x)$ s'écrit sous la forme d'une série à préciser.

c) Montrer que le schéma (2) est consistant.

d) Calculer $\dfrac{\partial \Phi}{\partial h}(x; 0)$ et montrer que le schéma est d'ordre 2.

e) Pour toutes matrices A et A' telles que $|||\ A\ ||| < 1$ et $|||\ A'\ ||| < 1$, on admet que
$$|||\ A^k - A'^k\ ||| \leq k\ |||\ A - A'\ |||\ r^{k-1}, \qquad r = \min(|||\ A\ |||, |||\ A'\ |||).$$
En déduire qu'il existe une constante C telle que pour tout $x, x' \in \mathbb{R}^N$
$$\big\|B(x) - B(x')\big\| \leq C\big\|x - x'\big\|..$$

f) Montrer que le schéma (2) est stable et convergent.