Exercices corrigés en vrac

Exercice 1. Soit μ une probabilité sur un ensemble mesurable $(X, \mathcal{A})$. On se donne une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ tel que $|f| \leq 1$ μ-presque partout. La suite

$$\int |f(x)|^n \, d\mu(x)$$

a-t-elle une limite ?

Solution de l'exercice 1. Pour x fixé, si $|f(x)| < 1$ alors $|f(x)|^n \to 0$. On commence donc par écrire

$$\begin{aligned}\int |f(x)|^n \, d\mu(x) = \int_{\{|f|=1\}} |f(x)|^n \, d\mu(x) + \int_{\{|f|<1\}} |f(x)|^n \, d\mu(x) \\ = \mu(\{|f| = 1\}) + \int 1_{\{|f|<1\}} |f(x)|^n \, d\mu(x).\end{aligned}$$

D'après ce qu'on a dit, $1_{\{|f|<1\}}|f|^n$ converge simplement vers 0. De plus,

$$\forall n \geq 1, |1_{\{|f|<1\}}|f|^n| \ \leq 1$$

or les fonctions constantes sont μ intégrables car μ est de masse finie. Le théorème de convergence dominée nous permet donc d'écrire

$$\int 1_{\{|f|<1\}} |f(x)|^n \, d\mu(x) \to 0$$

et donc

$$\int |f(x)|^n \, d\mu(x) \to \mu(\{|f| = 1\}).$$

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On considérera sur X des fonctions à valeurs réelles et l'on équipera $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne.

a) Soit $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables sur X et f une fonction mesurable sur X. Montrer que l'ensemble $A := \{x \in X \ ; \ \lim_n g_n(x) = f(x)\}$ est un ensemble mesurable (éventuellement vide, bien sûr).

b) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables qui converge μ-presque partout sur X vers une fonction f. On suppose que, pour chaque $n \geq 0$ fixé, on a $f_n \geq 0$ μ-presque partout. Montrer que $f \geq 0$ μ-presque partout.

   Indication : on pourra considérer un ensemble provenant de la question a) et une union dénombrable bien choisie d'ensembles de mesure nulle.

Solution de l'exercice 2. a) On peut écrire

$$A=\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq N}\{x\in X;\ |g_n(x)-f(x)|\leq 1/k\}=\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq N}(g_n-f)^{-1}([-\frac{1}{k},\frac{1}{k}]).$$

b) Soit A la partie mesurable obtenue à la question précédente, dans le cas "$g_n=f_n$ et $f=f$". Par hypothèse, $\mu(X\smallsetminus A)=0$. Comme f_n est presque-partout positive, il existe $B_n\in\mathcal{A}$ avec $\mu(B_n)=0$ tel que $f_n(x)$ pour tout $x\in X\smallsetminus B_n$. Posons

$$B=(X\smallsetminus A)\cup\Big(\bigcup_{n\geq 0}B_n\Big).$$

Alors pour $x\in X\smallsetminus B=A\cap(\bigcap_n(X\smallsetminus B_n))$ fixé, on a $f_n(x)\geq 0$ pour tout n et $f_n(x)\to f(x)$, donc $f(x)\geq 0$. Mais B est de mesure nulle comme union dénombrable d'ensemble de mesure nulle.

Exercice 3. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré.

a) Pourriez-vous donner deux exemples de fonctions sur X intégrables ?

b) Même question si on suppose de plus que $\mu(X)<+\infty$ (par exemple μ proba).

Solution de l'exercice 3. a) Il y a toujours la fonction nulle (μ-pp) qui est intégrable. Mais sans autre information sur $(X,\mathcal{A},\mu)$, on ne peut pas en donner une autre. En effet, si on prend $\mathcal{A}=\{\emptyset,X\}$ et $\mu(X)=+\infty$, seules les fonctions constantes sont mesurables et parmi celles-ci, seule celle identiquement nulle est intégrable.
b) Si μ est de masse finie, alors toutes les fonctions mesurables bornées (ou plus généralement essentiellement bornées) sont intégrables. En particulier toutes les fonctions constantes sont intégrables.

Exercice 4.
a) Montrer que $\mathscr{P}(\mathbb{N})\otimes\mathscr{P}(\mathbb{N})=\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$.
b) Soit μ la mesure de comptage de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mu\otimes\mu$ est la mesure de comptage de $\mathbb{N}^2$.

Solution de l'exercice 4. a) Tout d'abord $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ est une tribu qui contient les $A\times B$ où $A,B\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ donc contient leur tribu engendrée $\mathscr{P}(\mathbb{N})\otimes\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Inversement, comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, toute partie de $\mathbb{N}^2$ est la réunion disjointe au plus dénombrable de singletons. Or tout singleton de $\mathbb{N}^2$ s'écrit $\{m\}\times\{n\}$ et appartient donc à la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{N})\otimes\mathscr{P}(\mathbb{N})$, qui est stable par union dénombrable. On en déduit $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)\subseteq\mathscr{P}(\mathbb{N})\otimes\mathscr{P}(\mathbb{N})$.
b) De nouveau, comme toute partie de $\mathbb{N}^2$ est la réunion disjointe au plus dénombrable de singletons, par σ-additivité des mesures il suffit de vérifier que $\mu\otimes\mu$ coïncide sur les singletons avec la mesure de comptage. Or $\mu\otimes\mu(\{(m,n)\})=\mu(\{m\})\,\mu(\{n\})=1\times 1=1$, d'où le résultat.

Exercice 5. Montrer que le graphe d'une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ est de mesure nulle.

Solution de l'exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ une fonction borélienne. L'application $(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}))\to(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)),(x,t)\mapsto x$ est mesurable (puisque continue) et l'application f est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable, donc par composition $(x,t)\mapsto f(x)$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$-mesurable. Par ailleurs, l'application $(x,t)\mapsto t$ est continue donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$-mesurable. Par conséquent $G=\{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}:$

$f(x)=t\}$ est un ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$-mesurable, autrement dit la fonction $(x,t)\mapsto 1_{f(x)=t}$ est borélienne positive sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$. Donc par le théorème de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} 1_{t=f(x)} d\lambda_d(x)\, d\lambda_1(t) = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}} 1_{t=f(x)} d\lambda_1(t)\right) d\lambda_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} 0\, d\lambda_d(x) = 0.$$

Exercice 6.

a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}\,dx = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}$.

b) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que pour tout $a\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto e^{ax}f(x)$ est intégrable. Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{zx}f(x)dx = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)dx$.

Solution de l'exercice 6.

a) On a pour $x>0$

$$\frac{\sin x}{e^x-1} = \frac{\sin x\, e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sin x\, e^{-x}\sum_{n\geq 0} e^{-nx} = \sin x\sum_{n\geq 1} e^{-nx}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1}|\sin x\, e^{-nx}| = \frac{|\sin x|}{e^x-1}\leq\frac{x}{e^x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, on peut écrire

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1} = \sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}\sin x\, e^{-nx}dx.$$

De plus, en utilisant $\sin x = \mathrm{Im}\,(e^{ix})$, on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}\,dx = \sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}\mathrm{Im}\ e^{(i-n)x}dx = \sum_{n\geq 1}\mathrm{Im}\,\frac{1}{n-i} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}.$$

b) La fonction $\sum_{n\geq 0}|\frac{z^n x^n}{n!}f(x)| = \sum_{n\geq 0}\frac{|z|^n x^n}{n!}|f(x)| = e^{|z|x}|f(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. On peut donc permuter $\int$ et $\sum$.

Exercice 7. On travaille sur $\mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue qu'on notera simplement λ. On considère l'application (linéaire inversible) $\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ définie par

$$\varphi(x)=\varphi(x_1,\dots,x_d) := (\alpha_1\, x_1,\dots,\alpha_d\, x_d)$$

où $\alpha_1,\dots,\alpha_d$ sont des réels non-nuls fixés. On notera $\alpha := \prod_{i\leq d}\ |\alpha_i|>0$. Pour tout borélien $A\subset\mathbb{R}^d$ on pose

$$\nu(A) := \frac{1}{\alpha}\lambda(\varphi(A)).$$

a) Montrer que ν est une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$.

b) Montrer que ν est invariante par translation.

c) Montrer que pour tout borélien A on a

$$\lambda(\varphi(A)) = \alpha\lambda(A).$$

d) Comment en déduiriez-vous que pour une fonction mesurable f, qui est positive ou intégrable sur $\mathbb{R}^d$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \alpha \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi(y))\,dy\ ?$$

Solution de l'exercice 7. a) Remarquons d'abord que ν est bien définie. Pour cela, il faut vérifier que $\varphi(A) = \{y \in \mathbb{R}^d\ ;\ \exists x \in A \text{ t.q. } \varphi(x) = y\}$ est bien un borélien, pour pouvoir en prendre la mesure λ. En général, l'image d'un borélien, même par une application continue, n'est pas forcément un borélien. Néanmoins, quand l'application est de plus inversible d'inverse continue, c'est le cas. Ici on peut écrire $\varphi(A) = (\varphi^{-1})^{-1}(A)$, qui est donc borélien comme image réciproque du borélien A par l'application continue φ^{-1}. Ensuite, on remarque que $\nu(\emptyset) = \frac{1}{\alpha}\lambda(\varphi(\emptyset)) = \frac{1}{\alpha}\lambda(\emptyset) = 0$. Enfin, si on a une suite de parties boréliennes (A_n) deux à deux disjointes on a

$$\nu(\cup A_n) = \frac{1}{\alpha}\lambda(\varphi(\cup A_n)) = \frac{1}{\alpha}\lambda(\cup\varphi(A_n)$$

et pour conclure on remarque que les $(\varphi(A_n))_n$ sont aussi deux à deux disjointes (on peut le vérifier en utilisant que φ est injective, par exemple). Notez que l'on a pas encore utilisé que φ est application linéaire.
b) Pour l'invariance par translations, on utilise que pour $v_0 \in \mathbb{R}^d$ et une partie A on a $\varphi(A+v_0) = \varphi(A) + v_0$ (par définition de l'image et du fait que φ est linéaire).
c) On veut montrer que $\nu = \lambda$. Par les questions précédentes et par un théorème du cours, il suffit de montrer que $\nu([0,1]^d) = 1$. On remarque que $\varphi([0,1]^d) = [0,\alpha_1] \times \ldots \times [0,\alpha_d]$, et donc $\nu([0,1]^d) = \frac{1}{\alpha}\lambda([0,\alpha_1] \times \ldots \times [0,\alpha_d]) = \frac{1}{\alpha} \times \alpha = 1$.

Exercice 8. Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\varphi(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos x}{x}\,dx.$

a) Montrer que φ est continue sur $]0,+\infty[$.
b) Montrer que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer explicitement sa dérivée.
c) Calculer la limite de $\varphi(t)$ quand $t \to +\infty$. En déduire la valeur de $\varphi(t)$.

Solution de l'exercice 8.

a) On pose pour $t, x > 0$, $f(t,x) = e^{-xt}\frac{1-\cos x}{x}$. Pour montrer que φ est continue sur $]0,+\infty[$ il suffit de montrer que φ est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$. Soit donc $a > 0$. On vérifie les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale pour $t \in [a,+\infty[$:
— A t fixé, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable de $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vers $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
— A $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue car $t \mapsto e^{-tx}$ est continue.
— Comme $e^{-tx} \leq e^{-ax}$ pour $t \geq a$,

$$f(t,x) \leq \underbrace{e^{-xa}\frac{1-\cos x}{x}}_{:=h_a(x),\text{indépendante de } t}$$

Etudions la fonction h_a indépendante de t du second membre. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

— au voisinage de 0 : $\dfrac{1-\cos x}{x} = \dfrac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x} = \dfrac{1}{2}x + o(x)$

— au voisinage de $+\infty$, on majore brutalement : $|h_a(x)| \leq \frac{2e^{-xa}}{x}$ et la fonction à droite est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Donc h_a est intégrable.

Alors par le théorème de continuité sous le signe intégral, la fonction φ est définie et continue sur $[a,+\infty[$. Ceci est vrai pour tout $a>0$, donc φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On vérifie pour cela les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégral :

— pour tout $t>0$, $f(t,.) : x \mapsto f(t,x)$ est intégrable.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (donc $\lambda - p.p.$), $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}_+^*$. Calculons la dérivée partielle de f par rapport à t :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -e^{-xt}(1-\cos x)$$

On se place de nouveau sur un intervalle $]a,+\infty[$, $a>0$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = |e^{-xt}(1-\cos x)| \leq 2e^{-xa}, \text{ avec } a>0.$$

La fonction $x \mapsto 2e^{-xa}$ étant intégrable, l'hypothèse de domination est vérifiée.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, φ est dérivable sur $]a,+\infty[$ de dérivée :

$$\varphi'(t) = \int_0^{+\infty} -e^{-xt}(1-\cos x)\,dx = \int_0^{+\infty} -e^{-xt}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos x\,dx$$

La première intégrale se calcule directement : $I_1 = \left[\dfrac{e^{-xt}}{t}\right]_{x=0}^{+\infty} = -\dfrac{1}{t}$. Pour la seconde intégrale, on pourrait exprimer $\cos x$ comme la partie réelle de e^{ix}. On peut aussi la calculer par intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos x\,dx = \left[e^{-xt}\sin x\right]_{x=0}^{+\infty} + t\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin x\,dx = t\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin x\,dx.$$

Une deuxième intégration par parties donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin x\,dx = \left[-e^{-xt}\cos x\right]_{x=0}^{+\infty} - t\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos x\,dx = 1 - t\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos x\,dx.$$

On a donc $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos x\,dx = t - t^2\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos x\,dx$ d'où $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos x\,dx = \frac{t}{1+t^2}$.
Finalement $\varphi'(t) = -\frac{1}{t} + \frac{t}{1+t^2}$.

c) D'une part, on remarque que $|\frac{1-\cos(x)}{x}| \leq 1$ par l'inégalité des accroissements finis. Donc $|e^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x}| \leq e^{-x}$ pour tous $t\geq 1$, $x>0$, et e^{-x} est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a de plus $\lim_{t\to+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0$ pour tout $x>0$. Le théorème de continuité (de limite) sous le signe intégral entraîne que $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = 0$.

D'autre part, si on intègre l'expression de $\varphi'(t)$ trouvée à la question précédente, on obtient

$$\varphi(t) = -\ln t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = \ln(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}) + C$$

Il reste à déterminer la constante C. Pour cela, on fait tendre t vers $+\infty$ dans l'expression précédente : $\varphi(t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} C$. Donc $C = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(t) = -\ln t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$.

Exercice 9. Soit Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx.$$

a) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Solution de l'exercice 9.

a) Remarquons tout d'abord que Γ est bien définie lorsque $x > 0$. Nous allons démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \qquad \Gamma^{(p)}(t) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^p e^{-x} x^{t-1} dx \qquad (*).$$

On introduit la fonction $\gamma(t,x) := x^{t-1}e^{-x} = e^{(t-1)\ln x}e^{-x}$. A $x > 0$ fixé, elle est C^∞ en t de dérivée p-ième :

$$\frac{\partial^p\gamma}{\partial t^p}(t,x) = (\ln x)^p e^{(t-1)\ln x}e^{-x} = (\ln x)^p x^{t-1}e^{-x}$$

Comme dans l'exercice précédent, nous allons procéder en découpant l'intervalle d'intégration. Lorsque t est dans un segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$, $\frac{\partial^p\gamma}{\partial t^p}$ vérifie :

$$\left|\frac{\partial^p\gamma}{\partial t^p}(t,x)\right| \leq \varphi_p(x), \qquad \varphi_p(x) = \begin{cases} |\ln x|^p x^{a-1} & \text{si } x \in]0,1], \\ (\ln x)^p x^{b-1}e^{-x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La fonction φ_p est intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque lorsque $x \to 0^+$, on a $\varphi_p(x) = o(x^{a/2-1})$ (car $|\ln(x)|^p = o(x^{-a/2})$ en 0) et $\varphi_p(x) = O(e^{-x/2})$ lorsque $x \to +\infty$. Nous allons montrer par récurrence que Γ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$ et que $\Gamma^{(p)}$ vérifie la relation $(*)$ sur cet intervalle. Comme ceci sera vrai pour tout segment inclus dans $]0,+\infty[$, on aura prouvé le résultat sur $]0,+\infty[$ tout entier.

Pour $p = 0$, il s'agit de montrer que Γ est continue sur $[a,b]$. La majoration $|x^{t-1}e^{-x}| \leq \varphi_0(x)$ avec φ_0 intégrable sur $]0,+\infty[$ assure que l'hypothèse de domination du théorème de continuité sous le signe intégral est bien vérifiée. Comme $t \mapsto \gamma(t,x)$ est continue, ceci assure la continuité de Γ sur $[a,b]$.

Supposons maintenant l'hypothèse de récurrence vraie au rang p et montrons-la au rang $p+1$. La fonction $(t,x) \mapsto \frac{\partial^p\gamma}{\partial t^p}(t,x)$ est bien continûment dérivable par rapport à t et sa dérivée est égale à $\frac{\partial^{p+1}\gamma}{\partial t^{p+1}}$. Grâce à la majoration $|\frac{\partial^{p+1}\gamma}{\partial t^{p+1}}(t,x)| \leq \varphi_{p+1}(x)$ lorsque $t \in [a,b]$, avec intégrable, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral qui nous assure que $\Gamma^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que sa dérivée est égale à $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\partial^{p+1}\gamma}{\partial t^{p+1}}(t,x)dx$. Ainsi, l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $p+1$. Ceci assure bien que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) Nous allons commencer par montrer :

$$\forall t > 0, \Gamma(t+1) = t\Gamma(t).$$

On procède par intégration par parties.

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = [-x^t e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t x^{t-1} e^{-x} dx = t\Gamma(t).$$

La formule s'en déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en utilisant $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.