CHAPITRE 1

INÉGALITÉ DE BRUNN-MINKOWSKI, FORMES FONCTIONNELLES ET CONSÉQUENCES

On travaille sur $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle : pour $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,, \qquad |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

On notera aussi $|\cdot|$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ définie sur les parties boréliennes de $\mathbb{R}^n$. On parle dans ce cas plus volontiers de volume que de mesure.

1.1. Ensembles convexes et espaces vectoriels normés

Il y a une correspondance bien connue entre les convexes (compacts symétriques) et les espaces vectoriels normés de dimension finie n (que l'on associe aux normes sur $\mathbb{R}^n$).

Definition 1.1 **(Semi-normes).** — *On dit qu'une application* $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *est une semi-norme si elle est positivement* 1*-homogène et convexe et c'est à dire :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda > 0, \quad p(\lambda x) = \lambda p(x).$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y).$

Notez qu'une semi-norme p est toujours continue sur $\mathbb{R}^n$ (car convexe) et que $p(0) = 0$. Si p est *paire*, alors la condition 1. peut-être remplacée par

1'. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$

Voici un exemple typique de semi-norme (paire) :

$$p(x) = |x \cdot \theta| \quad (\theta \in \mathbb{R}^n \text{ fixé}).$$

Si p est une semi-norme sur $\mathbb{R}^n$, alors $K := \{p \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ est une convexe fermé contenant 0 dans son intérieur puisque $0 \in \{p < 1\}$.

Réciproquement, soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé d'intérieur non vide et contenant 0 dans son intérieur. (On peut signaler au passage que $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset \iff \mathrm{Aff}(K) = \mathbb{R}^n$). Pour un tel convexe K on peut définir sa *jauge*

$$\begin{array}{rcl} p_K : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longrightarrow & p_K(x) = \inf\{\alpha > 0 \ ;\ x \in \alpha K\,\} \end{array}$$

Remarquez que pour x fixé, puisque 0 appartient à l'intérieur de K, il existe $M>0$ tel que $\alpha > M \Rightarrow \frac{x}{\alpha} \in K$ et donc l'inf est bien défini. On montre très facilement que :

Proposition 1.2. — *Si K est un convexe fermé contenant 0 dans son intérieur, alors sa jauge p_K est une semi-norme et on a $K = \{p_K \le 1\}$. Cette jauge est paire si, et seulement si, K est* symétrique *(i.e. $K = -K$).*

Pour qu'une semi-norme p soit norme, il faut qu'elle soit paire et qu'on ait $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Comment garantir cela au niveau du convexe K ?

On dit que K est un *corps convexe* de $\mathbb{R}^n$ si K est convexe compact d'intérieur non vide. Si K est un corps convexe symétrique, alors automatiquement 0 est dans l'intérieur de K (OK ?)

Proposition 1.3. — *Si K est un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$, alors sa jauge p_K est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (souvent notée $\|\cdot\|_K$).*

Réciproquement, si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, alors la boule unité $K := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\| \le 1\}$ est un corps convexe symétrique.

Démonstration. — Il reste seulement à vérifier que $p_K(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $p_K(x_0) = 0$. Il existe donc une suite de réels $\lambda_n \to 0$ tel que $x_0 \in \lambda_n K$. Pour chaque n, on peut donc trouver $y_n \in K$ tel que $x_0 = \lambda_n y_n$. Comme K est compact, on peut extraire de la suite (y_n) une sous-suite convergente, ce qui aboutit bien à $x_0 = 0$. □

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie $n \ge 1$. Si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ est une base de E , on peut considérer l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ a = (a_1, \ldots, a_n) & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \end{array}$$

Cette application T est évidement un isomorphisme (algébrique) entre $\mathbb{R}^n$ et E. De plus, si on définit sur $\mathbb{R}^n$ la norme

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \qquad \|a\| := \|T(a)\|_E = \|\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i\|_E$$

alors T est une isométrie entre les evn $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ et $(E, \|\cdot\|_E)$. On a ainsi un dictionnaire entre les espaces vectoriels normés de dimension n et les normes sur $\mathbb{R}^n$: tout espace vectoriel normé de dimension n est isométrique à un $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ pour une certaine norme $\|\cdot\|$. Par conséquent, les espaces vectoriels normés de dimension n sont en correspondance avec les corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$.

Pour $p \ge 1$, on définit la norme $\|\cdot\|_p$, que l'on préfère parfois noter $\|x\|_{\ell_p^n}$, par

$$\|x\|_p = \|x\|_{\ell_p^n} := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad \text{pour} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

et on appelle ℓ_p^n l'evn correspondant :

$$\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p).$$

La boule unité de cet espace est notée B_p^n. La norme $\|\cdot\|_2$ sera donc aussi notée $|\cdot|$.

Proposition 1.4 ($\ell^n_{\log(n)} \simeq \ell^n_\infty$). — *Il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\|_{\ell^n_\infty} \leq \|x\|_{\ell^n_{\log(n)}} \leq C\,\|x\|_{\ell^n_\infty}.$$

Démonstration. — Voir exercice ci-dessous. □

Exercice 1.1. — *La distance géométrique $d_g(K, L) \geq 1$ entre deux corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$ (ou entre les evn correspondants) est définie par*

$$d_g(K, L) = \inf\{C > 0, \exists \lambda > 0, \quad \lambda K \subset L \subset C\lambda K\}.$$

En d'autres termes, il s'agit de la meilleure constante $c \geq 1$ pour laquelle on a, pour un certain $r > 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad r\|x\|_K \leq \|x\|_L \leq c\,r\|x\|_K.$$

Soit $q \geq p \geq 2$. Trouver un encadrement entre-elles des normes $\|\cdot\|_p$ et en déduire que

$$d_g(\ell^n_p, \ell^n_q) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn, son dual E^* (qui est l'espace des formes linéaires continues) est muni de la norme dite duale :

$$\forall \xi \in E^*, \quad \|\xi\|_* = \sup_{\|x\|\leq 1} |\xi(x)|.$$

Si on représente un evn E de dimension n dans $\mathbb{R}^n$ comme précédemment, alors on peut utiliser la correspondance entre vecteurs et formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ via le produit scalaire standard :

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{1.1}$$

Ainsi, si $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, alors on a (isométriquement)

$$E^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$$

dans la dualité donnée par (1.1), où la norme duale est définie par

$$\|y\|_* := \sup_{\|x\|\leq 1} |x \cdot y|.$$

Il résulte du théorème de Hanh-Banach que $(\|\cdot\|_*)_* = \|\cdot\|$ (voir la remarque ci-dessous). Par conséquent, toute norme peut s'écrire comme un supremum :

$$\|x\| = \sup_{\|y\|_*\leq 1} |x \cdot y|.$$

Remarque 1.5. — *Si K est un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$, alors la boule unité du dual de $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ est appelée le* polaire *de K et est notée K°, c'est à dire : $(\|\cdot\|_K)_* = \|\cdot\|_{K^\circ}$, soit encore*

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n \; ; \; x \cdot y \leq 1, \; \forall x \in K\}.$$

On a $x \cdot y \leq \|x\|_K \, \|y\|_{K^\circ}$. *Bien que nous n'en ayons pas besoin, signalons qu'il découle du théorème de Hanh-Banach sous sa forme géométrique (ou plus simplement par le théorème de projection sur un convexe) que*

$$(K^\circ)^\circ = K$$

(surtout $K = (K^\circ)^\circ$*...) ou de manière équivalente, qu'en dimension finie* $E^{**} = E$ *isométriquement, c'est-à-dire* $(\| \cdot \|_*)_* = \| \cdot \|$ *. Notez que pour* $x \in \partial K$*, il existe donc* $y \in \partial K^\circ$ *tel que* $x \cdot y = 1$ *(en tout point du bord d'un convexe on peut trouver un hyperplan tangent).*

Il est classique que pour $p \in [1, +\infty]$ on a (isométriquement)

$$(\ell_p^n)^* = \ell_q^n \qquad \text{où} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

avec la convention que $0 = \frac{1}{\infty}$. De manière équivalente $(B_p^n)^\circ = B_q^n$. Notez le rôle particulier de l'espace euclidien ℓ_2^n.

***Exercice 1.2* (Fonction Γ).** — *La fonction* $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}$ *définie pour* $x > 0$ *intervient dans de très nombreux calculs. Le comportement pour* x *grand est donné par la formule de Stirling*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = \sqrt{2\pi x}\,\left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 + \mathrm{O}(\frac{1}{x})\right) \sim \sqrt{2\pi x}\,\left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

En pratique, on se contente souvent de l'estimée :

$$\log \Gamma(x+1) = x \log\big(\frac{x}{e}\big) + \mathrm{o}(x),$$

ou de la forme équivalente

$$\big(\Gamma(x+1)\big)^{1/x} \sim \frac{x}{e}.$$

Dans cette dernière équivalence, on peut évidemment remplacer $\Gamma(x+1)$ *par* $\Gamma(x)$*.*

À titre d'exercice, démontrer l'estimation suivante (en général amplement suffisante) lorsque x *est entier : pour* $n \geq 1$,

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq n^n.$$

***Exercice 1.3* (Volume de la boule euclidienne et concentration)**

On rappelle que la mesure sphérique $\tilde\sigma$ *sur la sphère* $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ *peut être définie, pour une partie borélienne* $A \subset S^{n-1}$*, par la mesure de Lebesgue du cône engendré multipliée par* n *:*

$$\tilde\sigma(A) = n\big|\{tu\ ;\ t \in [0,1],\ u \in A\}\big| = n\big|\bigcup_{t \in [0,1]} tA\big|.$$

On montre aussi que $\tilde\sigma$ *est, à constante (multiplicative) près, l'unique mesure borélienne sur* S^{n-1} *invariante par rotations. On rappelle la formule d'intégration en polaire : pour toute fonction* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(ru)\, r^{n-1}\, d\tilde\sigma(u)\, dr.$$

On note σ la mesure de probabilité correspondante sur la sphère S^{n-1} :

$$\sigma := \frac{1}{\tilde{\sigma}(S^{n-1})}\,\tilde{\sigma}\,.$$

Enfin on pose

$$v_n = |B_2^n|$$

le volume de la boule (euclidienne) de rayon 1 centrée en 0.

1. *Montrer que pour toute fonction continue intégrable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on a*
$$\int_{\mathbb{R}^n} f = n v_n \int_0^{+\infty} \left(\int_{S^{n-1}} f(r\theta) r^{n-1}\, d\sigma(\theta) \right) dr.$$
En déduire, en prenant $f(x) = e^{-|x|^2/2}$ que
$$v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

2. *Montrer que, lorsque $n \to \infty$ on a*
$$v_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\sqrt{\frac{2\pi e}{n}} \right)^n \qquad et \quad v_n^{1/n} \sim \sqrt{\frac{2\pi e}{n}}.$$
On voit donc que le volume v_n est très petit. Pour avoir une boule de volume 1, il faut prendre un rayon de l'ordre de $\sqrt{n}$. Plus précisémment, si $r_n > 0$ est choisit tel que $|r_n B_2^n| = 1$, on a $r_n \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi e}}$; on préfère parfois dire qu'il existe une constante numérique $c > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$,
$$\frac{1}{c} \leq \frac{r_n}{\sqrt{n}} \leq c.$$
On peut aussi dire qu'il existe une constante numérique $C > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,
$$\frac{1}{C} \leq |\sqrt{n} B_2^n|^{1/n} \leq C.$$

3. *On note B_n la boule euclidienne (centrée en 0) de volume 1 : $B_n = r_n B_2^n$. Fixons une direction quelconque $\theta \in \mathbb{R}^n$ ($|\theta| = 1$) et considérons la fonction section dans la direction θ,*
$$g_n(t) := |B_n \cap \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \cdot \theta = t\}|, \qquad \forall t \in [-r_n, r_n].$$
Montrer que, pour t fixé on a, lorsque $n \to \infty$
$$g_n(t) \sim \sqrt{e}\, e^{-\pi e t^2}.$$
La fonction section est donc presque Gaussienne ; on peut d'ailleurs être plus précis dans la quantification. Il s'agit d'un phénomène très étudié dans le cas des ensembles convexes généraux et connu sous le nom de « Théorème de la Limite Centrale pour les corps convexes ». Ce qui est surprenant, c'est qu'on tende bien vers une distribution donnée (et donc que la variance de g_n soit bornée indépendamment de n). Bien que la boule ait un rayon tendant vers l'infini, l'intégrale de g_n s'approche par l'intégrale sur un segment de taille fixée. Plus précisément :

4. *Montrer que pour* n *assez grand on a*

$$\left|B_n \cap \{x \in \mathbb{R}^n\,;\ -\frac{1}{2} \le x_1 \le \frac{1}{2}\}\right| \ge \frac{96}{100}.$$

Étonnant, non ? (vu que B_n a un rayon de l'ordre de $\sqrt{n}$). Ce qui est encore plus étonnant, c'est qu'on peut montrer facilement que « presque toute » la mesure de B_n se trouve près du bord de B_n. Les phénomènes en grande dimension prennent notre intuition en défaut.

1.2. L'inégalité de Brunn-Minkowski

Pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$ on définit la somme (de Minkowski) par

$$A + B := \{a + b\,;\ a \in A,\ b \in B\},$$

et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda A := \{\lambda a\,; a \in A\}$. Il n'est pas facile de décrire analytiquement la somme

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \exists (a;b) \in A \times B,\ x = a + b\}$$

puisqu'un élément x de celle-ci peut admettre de nombreuses décompositions de la forme $x = a + b$ avec $(a, b) \in A \times B$. Pour se représenter géométriquement cette somme, on peut utiliser que

$$A + B = \bigcup_{x \in A} (x + B)$$

ce qui revient à dire qu'on promène B en chaque point de A. On a évidemment

$$\lambda A = \mu \left(\frac{\lambda}{\mu} A\right) \qquad \text{et} \qquad \lambda A + \lambda B = \lambda(A + B),$$

mais en général $\lambda A + \mu A \supsetneq (\lambda + \mu)A$.

Exercice 1.4. — *Soit* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Montrer que*

1. *Si* A *est convexe et* $\lambda, \mu \ge 0$ *on a :* $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$.
2. *Si* A *est convexe et symétrique (par rapport à l'origine) on a :* $A - A = 2A$.
3. *Si* A *est fermé, on a :*

$$A + A = 2A \iff A \text{ convexe.}$$

L'inégalité de Brunn-Minkowski sur $\mathbb{R}^n$ donne la relation suivante entre la structure linéaire de $\mathbb{R}^n$ et la mesure de Lebesgue

Théorème 1.6 **(Inégalité de Brunn-Minkowski).** — *Soit* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *non vides. On a :*

$$|A + B|^{1/n} \ge |A|^{1/n} + |B|^{1/n}. \tag{1.2}$$

Remarque 1.7 **(Mesurabilité).** — *Tel qu'il est énoncé, le théorème précédent n'est pas très correct. Il faut au moins préciser que les ensembles sont boréliens pour que cela ait un sens. Dans toute la suite, nous supposerons implicitement que tous les ensembles et toutes les fonctions considérés sont boréliens. Certes, le fait que* A *et* B *soient boréliens n'entraîne pas forcément que* $A + B$ *le soit (et oui...). Mais cela entraîne que* $A + B$ *est Lebesgue mesurable (il faut donc étendre la mesure par régularité aux ensembles Lebesgue mesurables).*

En fait, la régularité (intérieure) de la mesure permet de se restreindre au cas où les ensembles sont compacts : le cas général s'obtient par limite, puisque que pour toute partie A Lebesgue mesurable

$$|A| = \sup\{|K| \ ; \ A \supset K \, compacte\}.$$

Par ailleurs, pour la plupart des applications, on peut supposer que A et B sont ouverts ou fermés (ou compacts, ou plus généralement que A et B sont σ-compacts, ce qui entraîne que $A+B$ l'est aussi).

Ces questions de mesurabilité sont, dans ce cours, sans importance (car pouvant être réglées de manière triviale suivant le contexte) et seront négligées dans la suite.

La première conséquence classique de l'inégalité de Brunn-Minkowski est l'inégalité isopérimétrique. Notons B_2^n la boule euclidienne de rayon 1, $B_2^n := \{x \in \mathbb{R}^n \ ; |x| \leq 1\}$. On a alors, pour $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ que $A + \varepsilon B_2^n$ consiste en l'ensemble des points à distance au plus ε de A :

$$A + \varepsilon B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Par conséquent, si on pose

$$|\partial A| := \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{|A + \varepsilon B_2^n| - |A|}{\varepsilon},$$

on peut se persuader que, lorsque A a un bord régulier, cette quantité vaut bien la mesure de surface du bord de A. L'inégalité isopérimétrique affirme qu'à volume fixé, la mesure de surface du bord est minimale pour les boules euclidienne.

Fait 1.8. — *Soit A une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$ de mesure non-nulle et soit B une boule euclidienne telle que $|A| = |B|$. Alors on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |A + \varepsilon B_2^n| \geq |B + \varepsilon B_2^n|$$

et donc $|\partial A| \geq |\partial B|$.

Démonstration. — Prenons $B = rB_2^n$ avec $r > 0$ tel que $|A| = |rB_2^n|$. Comme il y a égalité dans l'inégalité de Brunn-Minkowski (1.2) lorsque les ensembles sont homothétiques et convexes (n'est-ce pas ?), on déduit bien de (1.2) que $|A + \varepsilon B_2^n|^{1/n} \geq |rB_2^n + \varepsilon B_2^n|^{1/n}$. □

En utilisant l'homogénéité du volume, on peut réécrire l'inégalité de Brunn-Minkowski sous la forme équivalente suivante : pour tout $t \in [0, 1]$ et $A, B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\big|(1-t)A + tB\big|^{1/n} \geq (1-t)|A|^{1/n} + t|B|^{1/n}, \tag{1.3}$$

En d'autre terme, on voit que la fonctionnelle $|\cdot|^{1/n}$ est concave (on dit que le volume est $\frac{1}{n}$-concave sur $\mathbb{R}^n$). De plus, en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique,

$$a^{1-t} b^t \leq (1-t)a + tb, \qquad \forall\, a, b \geq 0, \ t \in [0, 1], \tag{1.4}$$

on en déduit le résultat suivant :

***Théorème 1.9* (Inégalité de Brunn-Minkowski)**. — *Soit $A, B \subset \mathbb{R}^n$ et $t \in [0, 1]$. On a :*

$$\big|(1-t)A + tB\big| \geq |A|^{1-t}\, |B|^t, \tag{1.5}$$

Cette forme *adimensionnelle* exprime que le volume est log-concave. Ce théorème est completement équivalent au théorème précédent. Pour retrouver le Théorème 1.2, donnons-nous $A, B \subset \mathbb{R}^n$ avec $m := |A|^{1/n} + |B|^{1/n} \neq 0$. Posons

$$t := \frac{|B|^{1/n}}{m} \qquad \text{de sorte que} \qquad 1 - t = \frac{|A|^{1/n}}{m}.$$

On applique alors le Théorème 1.9 avec ce t et les ensembles de volume 1 suivants : $\tilde{A} = \frac{1}{|A|^{1/n}} A$ et $\tilde{B} = \frac{1}{|B|^{1/n}} B$. On obtient

$$1 \leq |(1-t)\tilde{A} + t\tilde{B}| = \left| \frac{A+B}{m} \right|$$

et donc (1.2).

Une conséquence classique de l'inégalité de Brunn-Minkowski concerne les sections des corps convexes. Tout d'abord, rappelons que tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ est muni naturellement de la structure euclidienne induite. Sur E, on dispose donc d'une mesure de Lebesgue et le théorème de Fubini nous dit que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est le produit de la mesure de Lebesgue sur E et de la mesure de Lebesgue sur $E^\perp$: pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (ou mesurable positive) on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{y \in E^\perp} dy \left(\int_{x \in E} f(x+y)\, dx. \right).$$

Tout cela est facile à comprendre en prenant une base orthonormée de E complétée par une base orthonormée de $E^\perp$.

Étant donné un ensemble borélien $A \subset \mathbb{R}^n$ et un vecteur unité $\theta \in \mathbb{R}^n$, $|\theta| = 1$ (on dit que θ est une *direction*), on peut considérer la fonction sections (hyperplanes) dans la direction θ qui est définie par,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{A,\theta}(t) := \left| A \cap \big(t\theta + \theta^\perp\big) \right| = \left| \big(A - t\theta\big) \cap \theta^\perp \right|. \tag{1.6}$$

Noter que la mesure considérée est donc la mesure de Lebesgue $n-1$ dimensionnelle (dans l'hyperplan $\theta^\perp$). Le théorème de Fubini donne

$$\int_{\mathbb{R}} f_{A,\theta}(t)\, dt = |A|.$$

Proposition 1.10. — *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ et θ une direction. Alors la fonction section $f_{K,\theta}$ définie par* (1.6) *est telle que $f_{K,\theta}^{\frac{1}{n-1}}$ est concave sur son support. En particulier,* $\log f_{K,\theta}$ *est concave.*

Démonstration. — Introduisons

$$K(t) := \big(K - t\theta\big) \cap \theta^\perp = K \cap (t\theta + \theta^\perp) - t\theta.$$

Alors, pour $s \in [0,1]$ et $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on vérifie facilement que, comme K est convexe, on a

$$(1-s)K(t_0) + sK(t_1) \subset K\big((1-s)t_0 + st_1\big).$$

Le résultat s'ensuit, en appliquant, lorsque ces ensembles sont non-vides, l'inégalité de Brunn-Minkowski dans l'espace euclidien $n-1$ dimensionnel $\theta^\perp$. La log-concavité se déduit par l'inégalité arithmético-géométrique. □

Conséquence classique :

Exercice 1.5 **(Maximalité des sections centrales d'un corps convexe symétrique)**
Soit K un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$ et θ une direction. Montrer que parmi toutes les sections (affines) parallèles à $\theta^\perp$, celle passant par l'origine a un volume ($(n-1)$–dimensionnel) maximal.

1.3. Inégalité de Prékopa–Leindler

L'inégalité de Prékopa-Leindler est une (des) forme fonctionnelle de l'inégalité de Brunn-Minkowski. Cette inégalité d'énoncé (et de démonstration) très simple date du milieu des année 70. Elle a eu et a encore des ramifications importantes en analyse fonctionnelle et harmonique, en partie à travers les diverses techniques de démonstrations qu'elle a suscitées.

Théorème 1.11 **(Inégalité de Prékopa-Leindler)**. — *Soit $t \in]0,1[$ et $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ trois fonctions positives (intégrables sur $\mathbb{R}^n$) tels que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad h((1-t)x+ty) \geq f^{1-t}(x)g^t(y). \tag{1.7}$$

Alors on a : $\displaystyle\int h \geq \left(\int f\right)^{1-t}\left(\int g\right)^t.$

Remarque 1.12. — *On peut, dans la plupart des cas, assouplir la condition d'intégrabilité sur f et g en utilisant le théorème de convergence monotone. Par exemple, il est suffisant de supposer seulement que h et f sont intégrables avec $\int f \neq 0$: le théorème garanti que g intégrable. En effet, si f, g, h vérifient (1.7), alors f, g_R, h le vérifient aussi, où $g_R := g\,\mathbf{1}_{RB_2^n} \leq g$ est la troncature de g à une boule de rayon $R > 0$ (par exemple). Alors la conclusion s'applique avec g_R qui est intégrable. On conclut par le théorème de convergence monotone pour $R \to +\infty$.*

On peut aussi énoncer le résultat de manière condensée : pour $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrables on a

$$\int \sup_{z=(1-t)x+ty} \left\{f(x)^{1-t}g(y)^t\right\}\, dz \;\geq\; \left(\int f\right)^{1-t}\left(\int g\right)^t. \tag{1.8}$$

L'inégalité de Prékopa-Leindler peut donc se voir comme une forme inverse de l'inégalité de Hölder.

On obtient l'inégalité de Brunn-Minkowski sous sa forme multiplicative (1.5) en prenant $f = 1_A$ et $g = 1_B$, les fonctions indicatrices d'ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Mais on peut appliquer cette inégalité à d'autres situations.

On dit qu'une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est log-concave si $\log(\varphi) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est concave, c'est-à-dire si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi((1-t)x+ty) \geq \varphi^{1-t}(x)\varphi^t(y)$$

On peut aussi dire que

$$\varphi \text{ log-concave } \iff \varphi = e^{-V} \text{ avec } V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ convexe.}$$

Une fonction constante est log-concave. Si K est un ensemble convexe, alors 1_K est une fonction log-concave. On voit aussi que le produit de deux fonctions log-concaves est log-concave.

On dit qu'une mesure (borélienne) μ sur $\mathbb{R}^n$ est à densité log-concave si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et si $d\mu(x) = \varphi(x)\, dx$ avec φ log-concave. Voici deux exemples classiques de mesures log-concaves :

1. la mesure gaussienne (standard) γ_n, qui est la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ donnée par
$$d\gamma_n(x) = e^{-|x|^2/2}\, \frac{dx}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\,. \tag{1.9}$$
2. La mesure de Lebesgue, et aussi la restriction de la mesure de Lebesgue λ_K à un ensemble convexe $K \subset \mathbb{R}^n$:
$$\lambda_K(A) := |K \cap A| \qquad \forall A \subset \mathbb{R}^n \text{ borélien.}$$

Fait 1.13. — *Plus généralement, si μ est une mesure à densité log-concave, alors sa restriction μ_K à un ensemble convexe est encore une mesure à densité log-concave.*

Si φ est log-concave sur $\mathbb{R}^n$, alors on voit que si f, g, h vérifient (1.7), il en va de même pour $f\varphi$, gφ et $h\varphi$. Le théorème de Prékopa-Leindler s'auto-améliore donc en :

Théorème 1.14. — *On suppose que μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ à densité log-concave. Soit $t \in]0,1[$ et $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ trois fonctions positives (μ-intégrables) vérifiant* (1.7). *Alors on a :* $\displaystyle\int h\, d\mu \geq \left(\int f\, d\mu\right)^{1-t} \left(\int g\, d\mu\right)^{t}$.

En particulier, on a, pour tout $t \in [0,1]$,
$$\forall A, B \subset \mathbb{R}^n, \qquad \mu\big((1-t)A + tB\big) \geq \mu(A)^{1-t}\, \mu(B)^t \tag{1.10}$$

Une mesure vérifiant (1.10) est dite *log-concave*. Le théorème précédent montre qu'une mesure sur $\mathbb{R}^n$ ayant une densité log-concave est log-concave. On peut montrer facilement que pour une mesure ayant une densité, la réciproque est également vraie. Dans la suite, lorsque nous parlerons de mesure log-concave, nous aurons exclusivement en tête une mesure ayant une densité log-concave.

***Exercice 1.6* (Inégalité d'Anderson)**. — *Soit μ une mesure à densité log-concave* paire *sur $\mathbb{R}^n$ et $C \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble* convexe symétrique. *Montrer que*
$$\mu(C) \geq \mu(C + x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dans le cas où la densité est e^{-V} avec V non seulement convexe, mais aussi uniformément convexe ($\mathrm{Hess}_x V \geq \lambda I$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour un certain $\lambda > 0$), comme c'est le cas pour la mesure gaussienne, on peut s'attendre à améliorer l'inégalité de Prékopa-Leindler (au sens où l'on peut remplacer (1.7) par une condition plus faible). On verra plus loin que c'est bien le cas plus loin, ce qui nous permettra d'obtenir des inégalités de concentration.

Par ailleurs, on déduit immédiatement (à faire à titre d'exercice) de l'inégalité de Prékopa-Leindler le résultat utile suivant qui dit que : « une marginale d'une fonction log-concave est log-concave ».

Théorème 1.15 **(Théorème de Prékopa).** — *Soit $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors la fonction ϕ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par*

$$e^{-\phi(t)} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(t,x)}\, dx$$

est convexe sur $\mathbb{R}$.

Ce théorème, plus faible que l'inégalité de Prékopa-Leindler, permet de retrouver l'inégalité de Brunn-Minkowski pour les ensembles convexes. Il donne aussi immédiatement que la convolée de deux fonctions log-concaves est encore log-concave.

Pour démontrer l'inégalité de Prékopa-Leindler, on peut commencer par observer qu'elle se *tensorise*, au sens où si l'on sait la démontrer jusqu'à la dimension $n \geq 1$, alors elle est aussi vraie en dimension $n + 1$. En effet, soit $f, g, h : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad h((1-t)x + ty) \geq f^{1-t}(x) g^t(y)$. Écrivons les vecteurs x de $\mathbb{R}^{n+1}$ sous la forme $(x_1, \overline{x})$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Pour $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ donnés, on a

$$\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n, \qquad h((1-t)x_1 + ty_1, (1-t)\overline{x} + t\overline{y}) \geq f^{1-t}(x_1, \overline{x}) g^t(y_1, \overline{y})$$

et donc, par l'inégalité de Prékopa-Leindler sur $\mathbb{R}^n$ on a

$$H((1-t)x_1 + ty_1) \geq F^{1-t}(x_1) G^t(y_1)$$

où l'on a posé, pour tous les $t \in \mathbb{R}$,

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^n} h(t, \overline{x})\, d\overline{x}, \quad F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, \overline{x})\, d\overline{x}, \quad G(t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(t, \overline{x})\, d\overline{x}.$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, on conclut en re-appliquant l'inégalité de Prékopa-Leindler, cette fois en dimension 1 et en utilisant Fubini ($\int_{\mathbb{R}^{n+1}} h = \int_{\mathbb{R}} H$ et idem pour f et g).

On est donc ramené à démontrer l'inégalité de Prékopa-Leindler lorsque $n = 1$. On va présenter deux démonstration de ce cas.

Première démonstration du Théorème 1.11 pour $n = 1$. — On commence par démontrer l'inégalité de Brunn-Minkowski (1.2) sur $\mathbb{R}$, ce qui est très facile. En effet, soit A, B deux compacts (non-vides) de $\mathbb{R}$ (le cas des boréliens s'obtient par approximation, comme expliqué plus haut). Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, on peut translater les ensembles A et B comme on veut. On peut en particulier supposer que $\max A = 0 = \min B$, ce qui implique que

$$A + B \supset A \cup B,$$

et que

$$|A + B| \geq | A \cup B| = |A| + |B|.$$

Nous allons maintenant démontrer l'amélioration suivante du Théorème 1.11 en dimension 1.

Lemme 1.16. — *Soit* $t \in]0,1[$ *et* $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *tels que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad h((1-t)x + ty) \geq \min\{f(x), g(y)\}.$$

Alors, si $\sup f = \sup g$, *on a* $\displaystyle\int h \geq (1-t)\int f + t\int g$.

Le Théorème 1.11 pour $n = 1$ s'en déduit bien. En effet, on peut supposer dans le théorème, par homogénéité, que $\sup f = \sup g$. On voit alors que la condition requise dans le lemme est plus faible que l'hypothèse (1.7), alors que la conclusion est plus forte (par l'inégalité arithmético-géométrique).

Pour démontrer le lemme, on peut supposer que $\sup f = \sup g = 1$. Pour toute fonction positive $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable on a

$$\int_{\mathbb{R}} u = \int_0^{+\infty} |A_u(s)|\, ds \quad \text{où} \quad A_u(s) = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ u(x) \geq s\}.$$

L'hypothèse du Lemme garantit que pour tout s on a

$$(1-t)A_f(s) + tA_g(s) \subset A_h(s).$$

Pour $s \in]0,1[$ ces ensembles sont non-vides et donc, par l'inégalité de Brunn-Minkowski sur $\mathbb{R}$ on a $|A_h(s)| \geq (1-t)|A_f(s)| + t|A_g(s)|$. On en tire que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h = \int_0^{+\infty} |A_h(s)|\, ds &\geq \int_0^1 |A_h(s)|\, ds \\ &\geq (1-t)\int_0^1 |A_f(s)|\, ds + t\int_0^1 |A_g(s)|\, ds = (1-t)\int_{\mathbb{R}} f + t\int_{\mathbb{R}} g.\end{aligned}$$

□

Deuxième démonstration du Théorème 1.11 pour $n = 1$. — On va supposer pour cette démonstration que les fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sont *continues* et *strictement positives sur* $\mathbb{R}$. On peut se ramener à ce cas là par approximations (c'est vite dit...). Par homogénéité, on peut supposer que $\int_{\mathbb{R}} f = 1 = \int_{\mathbb{R}} g$. Les fonctions F, G définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f \quad \text{et} \quad G(x) := \int_{-\infty}^x g$$

sont alors des bijections C^1 strictement croissantes de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$. Ainsi la fonction

$$T := G^{-1} \circ F$$

est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\infty}^x f = \int_{-\infty}^{T(x)} g$$

et donc

$$f(x) = T'(x)g(T(x)).$$

En introduisant la bijection C^1 strictement croissante $T_t(x) := (1-t)x + tT(x)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} h = \int_{\mathbb{R}} h(T_t(x))T_t'(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} h(T_t(x))((1-t) + tT'(x))\, dx.$$

L'hypothèse (1.7) et l'inégalité artithmético-géométrique (utilisable car $\boxed{T' \geq 0}$) nous disent que

$$h(T_t(x)) \geq f^t(x)g^t(T(x)) \quad \text{et} \quad (1-t) + tT'(x) \geq T'(x)^t$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}} h \geq \int_{\mathbb{R}} f^{1-t}(x)g^t(T(x)T'(x)^t \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx = 1$$

□

Remarque 1.17. — *Cette jolie démonstration peut, grâce à un outil appelé le transport monotone de mesure (on peut utiliser le transport dit de Brenier), s'étendre aux dimensions supérieures.*

1.4. Lemme de Borell

***Proposition 1.18* (Lemme de Borell)**. — *Soit μ une probabilité log-concave sur $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout ensemble convexe symétrique $A \subset \mathbb{R}^n$ avec $\mu(A) =: a > 0$ on a,*

$$\forall r \geq 1, \qquad \mu\big(\mathbb{R}^n \setminus rA\big) \;\leq\; a\left(\frac{1-a}{a}\right)^{\frac{r+1}{2}}.$$

En particulier, si A est un ensemble convexe symétrique tel que $\mu(A) \geq \frac{3}{4}$, on a, pour tout $r \geq 1$,

$$\mu\big(\mathbb{R}^n \setminus rA\big) \leq e^{-r/2} \tag{1.11}$$

Démonstration. — Pour $B \subset \mathbb{R}^n$, notons $B^c := \mathbb{R}^n \setminus B$ le complémentaire. Soit donc A un ensemble convexe symétrique (d'intérieur non-vide). Sans perte de généralité, on peut supposer que A est de plus fermé. On a, pour tout $r > 1$,

$$A^c \supset \frac{2}{r+1}(rA)^c + \frac{r-1}{r+1}A.$$

Pour le voir, on peut considérer la jauge p_A de A, qui est une semi-norme paire. On a que $A = \{p_A \leq 1\}$ et plus généralement que $rA = \{p_A \leq r\}$. Pour tout $x \in (rA)^c$ et $y \in A$ on a

$$p_A\left(\frac{2}{r+1}x + \frac{r-1}{r+1}y\right) \geq p_A\left(\frac{2}{r+1}x\right) - p_A\left(-\frac{r-1}{r+1}y\right) > \frac{2}{r+1} \times r + \frac{r-1}{r+1} \geq 1.$$

L'inégalité de Brunn-Minkowski pour μ nous donne

$$\mu(A^c) \geq \big(\mu(rA)\big)^{2/(r+1)}\big(\mu(A)\big)^{(r-1)/(r+1)}$$

ce qui revient au résultat annoncé. Lorsque $a \in [\frac{3}{4}, 1]$ on a

$$a\left(\frac{1-a}{a}\right)^{\frac{r+1}{2}} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{r+1}{2}} \leq e^{-\frac{r+1}{2}\log(3)} \leq e^{-r/2}.$$

□

Nous allons en déduire une inégalité de déviation pour les fonctions convexes paires homogène de degré 1, c'est-à-dire pour les semi-normes paires (qui sont donc les jauges d'ensembles convexes paires).

Corollaire 1.19. — *Soit μ une probabilité log-concave sur $\mathbb{R}^n$. Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ est une semi-norme paire, alors, pour $m = \int F\, d\mu$ on a*

$$\forall r \geq 1, \qquad \mu\left(\{F \geq 4m\, r\}\right) \leq e^{-r/2}.$$

L'inégalité reste évidemment vraie si on remplace m par $\left(\int F^q\, d\mu\right)^{1/q}$ avec $q \geq 1$.

Démonstration. — Introduisons l'ensemble $A := \{F < 4m\}$. Alors A est convexe symétrique. De $m \geq \displaystyle\int_{A^c} F\, d\mu \geq 4m\mu(A^c)$ on tire que

$$\mu(A) \geq \frac{3}{4}.$$

Par ailleurs, pour $r \geq 1$ on a, par homogénéité de F,

$$\{F < 4mr\} = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ F(\frac{x}{r}) < 4m\} = rA$$

et donc d'après le Lemme de Borell, on a

$$\mu\left(\{F \geq 4m\, r\}\right) = \mu((rA)^c) \leq e^{-r/2}.$$

Notons que par Jensen on a $\int F\, d\mu \leq \left(\int F^q\, d\mu\right)^{1/q}$ et donc si on remplace m par $\left(\int F^q\, d\mu\right)^{1/q}$ l'inégalité reste vraie. □

Dans un langage qui sera précisé ultérieurement, on dit que pour une mesure log-concave, les semi-normes paires sont ψ_1. Ce qui est essentiel dans ces inégalités est que la dimension n'intervient pas et que l'estimée est uniforme (indépendante de n et de μ). Les exemples typiques d'application sont

$$F(x) = |x|$$

et, pour une direction θ fixée,

$$F(x) = |x \cdot \theta|.$$

Corollaire 1.20. — *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de volume 1. Alors*

$$\forall r \geq 1 \qquad \left|\left\{x \in K \ ; \ |x| \geq 4r \int_K |y|\, dy\right\}\right| \leq e^{-r/2}$$

et pour toute direction θ

$$\forall r \geq 1 \qquad \left|\left\{x \in K \ ; \ |x \cdot \theta| \geq 4r \left(\int_K |y \cdot \theta|^2\, dy\right)^{1/2} \right\}\right| \leq e^{-r/2}.$$

La première inégalité du corollaire précédent peut être améliorée ; on montre qu'en fait la décroissante est en e^{-cr^2} pour une certaine constante numérique c (on dit que la norme euclidienne sur un corps convexe est ψ_2 ; en fait cette amélioration peut être encore améliorée...). Une amélioration analogue pour « beaucoup » de directions θ est un des grands problèmes ouverts de la théorie asymptotique des corps convexes.

1.5. Prékopa-Leindler et inégalités de concentration

Nous commençons par un résultat général (relié à ce que l'on appelle « la propriété (τ) de Maurey ») qui est une conséquence immédiate de l'inégalité de Prékopa-Leindler.

Lemme 1.21. — *Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}^n$ de densité e^{-V} et $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad V(x) + V(y) - 2V\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \omega(x-y) \tag{1.12}$$

Alors, pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (avec $\int e^{-\varphi}\, d\mu \in]0, +\infty[$) on a

$$\int e^{-\varphi}\, d\mu \int e^{Q_\omega \varphi}\, d\mu \leq 1, \tag{1.13}$$

*où $Q_\omega \varphi$ est l'*inf-convolée *de φ définie sur $\mathbb{R}^n$ par*

$$Q_\omega \varphi(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\varphi(x) + \omega(x-y).\right].$$

En général, ω sera une fonction positive paire avec $\omega(0) = 0$ (et donc V sera en particulier convexe). Alors, ω représente le « prix à payer » (dans le passage de φ à $Q_\omega \varphi \leq \varphi$) pour pouvoir inverser l'inégalité

$$\int e^{-\varphi}\, d\mu \int e^{\varphi}\, d\mu \geq 1$$

qui correspond tout simplement à l'inégalité de Jensen. On cherche à ce que ω soit le plus grand possible pour que $Q_\omega \varphi$ soit le plus proche possible de φ. Notez que l'inégalité (1.13) est trivialement vérifiée si $\omega = 0$, puisque $\inf \varphi - \varphi \leq 0$.

Démonstration. — On va appliquer le théorème de Prékopa-Leindler à des fonctions bien choisies. Introduisons les fonctions positives f, g, h définies sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = e^{-\varphi(x)} e^{-V(x)}, \quad g(y) = e^{Q_\omega \varphi(y)} e^{-V(y)}, \quad h(z) = e^{-V(z)}.$$

En utilisant (1.12) on voit que ces fonctions vérifient la condition (1.7) pour $t = \dfrac{1}{2}$ dès que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{2}\omega(x-y) \geq -\frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2} Q_\omega \varphi(y),$$

ce qui est bien le cas, par définition de $Q_\omega \varphi$ (!). □

On fixe maintenant, et jusqu'à la fin de ce paragraphe, un $p \geq 2$. C'est surtout le cas $p = 2$ qui nous intéressera dans la suite du cours. Le théorème précédent est intéressant lorsque V est une fonction convexe pour laquelle on peut trouver une fonction ω de la forme

$$\omega(z) = \frac{c}{2p} \|z\|^p.$$

où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $c > 0$.

Corollaire 1.22. — *Soit μ une mesure à densité log-concave e^{-V} telle qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ et une constante $c > 0$ tel que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad V(x) + V(y) - 2V\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{c}{2p}\|x-y\|^p.$$

Alors on a :

1. *Pour tout ensemble* $A \subset \mathbb{R}^n$*, si on note* $d_{\|\cdot\|}(x,A) = \inf_{y \in A} \|y - x\|$*, on a*
$$\int e^{\frac{c}{2p} d_{\|\cdot\|}(x,A)^p}\, d\mu(x) \leq \frac{1}{\mu(A)}.$$
En particulier, pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ *tel que* $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$*, on a*
$$\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ d_{\|\cdot\|}(x,A) \geq r\right\}\right) \leq 2e^{-\frac{c}{2p} r^p}, \quad \forall r > 0.$$
2. *Soit* $q \in]1,2]$ *tel que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *et posons* $c_p := \frac{1}{q}\left(\frac{2}{c}\right)^{q-1}$*. Si* f *est une fonction lipschtzienne sur* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *de constante* $L > 0$*, c'est-à-dire si*
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |f(y) - f(x)| \leq L\|y - x\|,$$
alors,
$$\forall \lambda > 0, \qquad \int e^{\lambda\left[f - \int f\, d\mu\right]}\, d\mu \leq e^{c_p L^q \lambda^q}.$$
De plus, on a
$$\forall r > 0, \qquad \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n\ ; f(x) \geq \int f\, d\mu + r\right\}\right) \leq e^{-\frac{c}{2p}\frac{r^p}{L^p}},$$
$$\text{et} \quad \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \left|f(x) - \int f\, d\mu\right| \geq r\right\}\right) \leq 2e^{-\frac{c}{2p}\frac{r^p}{L^p}}.$$

Remarque 1.23. — *On remarquera que l'hypothèse sur* V *entraine que pour* x *assez grand,* $V(x) \geq C\|x\|^p \geq C\|x\|^2$ *pour une certaine constantes* $C > 0$*. Cela garantit que si* f *est lipschtzienne, alors* f *et* $e^{\lambda f}$ *sont* μ*-intégrables, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

On utilisera fréquemment la dualité (de Lengendre) suivante : pour $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $s \in \mathbb{R}$
$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(\lambda s - \frac{1}{p}|\lambda|^p\right) = \frac{1}{q}|s|^q.$$
et si $s \geq 0$, on a aussi $\displaystyle\sup_{\lambda > 0} \left(\lambda s - \frac{1}{p}|\lambda|^p\right) = \frac{1}{q} s^q$.

Démonstration. — On travaille donc ici avec
$$Q\varphi(y) := Q_\omega \varphi(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\varphi(x) + \frac{c}{2p}\|x - y\|^p\right].$$
Soit φ la fonction valant 0 sur A et $+\infty$ à l'extérieur de A. Alors,
$$Q\varphi(y) = \inf_{x \in A} \frac{c}{2p}\|x - y\|^p = \frac{c}{2p} d_{\|\cdot\|}(x,A)^p.$$
On a alors par le Théorème 1.21
$$1 \geq \int e^{-\varphi}\, d\mu \int e^{Q_{\frac{c}{2}}\varphi}\, d\mu = \mu(A) \int e^{\frac{c}{2p} d_{\|\cdot\|}(x,A)^p}\, d\mu(x).$$
Le « en particulier » se déduit trivialement par l'inégalité de Markov :
$$\int e^{\frac{c}{2p} d_{\|\cdot\|}(x,A)^p}\, d\mu(x) \geq \int_{\{x\ ;\ d_{\|\cdot\|}(x,A) \geq r\}} e^{\frac{c}{2p} d_{\|\cdot\|}(x,A)^p}\, d\mu(x) \geq e^{\frac{c}{2p} r^p} \mu(\{x\ ;\ d_{\|\cdot\|}(x,A) \geq r\}).$$

Soit f L-lipschitz sur $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$. On peut supposer que $\int f\, d\mu = 0$. On applique le Théorème 1.21 à la fonction $\varphi = -\lambda f$. On a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$-\lambda f(x) + \frac{c}{2p}\|x-y\|^p \geq -\lambda f(y) - \lambda L\|y-x\| + \frac{c}{2p}\|x-y\|^p$$

et donc

$$\begin{aligned} Q(-\lambda f)(y) &\geq -\lambda f(y) + \inf_{x\in\mathbb{R}^n}[-\lambda L\|y-x\| + \frac{c}{2p}\|x-y\|^p] \\ &= -\lambda f(y) - \sup_{t>0}[\lambda L t - \frac{c}{2p}t^p] \\ &= -\lambda f(y) - \frac{1}{q}\left(\frac{2}{c}\right)^{q-1}(L\,\lambda)^q. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\int e^{\lambda f}\, d\mu \int e^{-\lambda f}\, d\mu \leq e^{c_p L^q \lambda^q}.$$

On conclut en utilisant l'inégalité de Jensen : $\displaystyle\int e^{-\lambda f}\, d\mu \geq e^{-\lambda \int f\, d\mu} = 1$.

Enfin, par l'inégalité de Markov on a, pour $r > 0$,

$$\mu(\{f \geq r\}) \leq e^{-\lambda r + c_p L^q \lambda^q}.$$

On remarque que l'on peut aussi appliquer le résultat à $-f$, et par conséquent,

$$\mu(\{|f| \geq r\}) \leq 2e^{-\lambda r + c_p L^q \lambda^q}.$$

On conclut en minimisant en λ :

$$\inf_{\lambda>0}[-\lambda r + c_p L^q \lambda^p] = -\sup_{\lambda>0}[\lambda r - c_p L^q \lambda^q] = -\frac{c}{2p} r^p / L^p$$

□

Un exemple intéressant d'application est fourni par une mesure (de probabilité) à densité log-concave e^{-V} avec V (de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$) uniformément convexe, c'est-à-dire tel qu'il existe $\lambda > 0$ pour lequel on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{Hess}_x V \geq \lambda \mathrm{Id} \tag{1.14}$$

Exercice 1.7. — 1. *Montrer que pour toute fonction (de classe C^2) $\alpha : [0,1] :\longrightarrow \mathbb{R}$, tout $k \in \mathbb{R}$, $s \in [0,1]$, on a :*

$$\big(\forall t \in [0,1],\ \alpha''(t) \geq k\big) \Longrightarrow (1-s)\alpha(0) + s\alpha(1) - \alpha(s) \geq k\, s(1-s)/2.$$

2. *Soit V de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant* (1.14). *Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $s \in [0,1]$,*

$$(1-s)V(x) + sV(y) - V((1-s)x + sy) \geq \lambda\, s(1-s)|x-y|^2/2.$$

Ainsi, une fonction vérifiant (1.14) satisfait

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad V(x) + V(y) - 2V\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \lambda |x-y|^2/4,$$

c'est-à-dire la condition (1.12) pour la norme euclidienne $|\cdot|$, $p = 2$ et $c = \lambda$. Les conclusions du corollaire précédent sont donc valables pour la probabilité μ de densité e^{-V}.

L'exemple essentiel d'une telle mesure est la mesure gaussienne γ_n, pour laquelle la condition (1.14) est vérifiée avec $\lambda = 1$. On peut évidemment aussi remarquer directement que par l'égalité du parallélogramme on a (1.12) sous la forme

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad |x|^2/2 + |y|^2/2 - \left|\frac{x+y}{2}\right|^2 = |x-y|^2/4.$$

On a donc, avec la notation usuelle (euclidienne) $d(x, A) = \inf_{y \in A} |y - x|$,

Corollaire 1.24. — 1. *Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, on a*

$$\int e^{d(x,A)^2/4}\, d\gamma_n(x) \le \frac{1}{\gamma_n(A)}.$$

En particulier, pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\gamma_n(A) \ge \frac{1}{2}$, on a

$$\gamma_n\left(\{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; d(x, A) \ge r\}\right) \le 2e^{-r^2/4}, \quad \forall r > 0.$$

2. *Si f est une fonction 1-lipschtzienne sur $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ alors*

$$\forall r > 0, \qquad \gamma_n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; f(x) \ge \int f\, d\gamma_n + r\right\}\right) \le e^{-r^2/4}$$

$$\text{et} \quad \gamma_n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \left|f(x) - \int f\, d\gamma_n\right| \ge r\right\}\right) \le 2e^{-r^2/4}.$$

1.6. Exercices suppémentaires

Exercice 1.8 **(Fonction log-concaves et diamètre d'un corps convexe isotrope)**

1. *Dans cette question $k \in \mathbb{N}^*$ est fixé et on se donne une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $f^{1/k}$ est concave sur (son support) $[0, M]$ avec $f(M) = 0$ (on convient d'étendre f par 0 en dehors de $[0, M]$). On veut estimer M en fonction de $\int f$ et $\int t^2 f(t)\, dt$.*
   On introduit la fonction $g : [0, M] \to \mathbb{R}^+$ (étendue par 0 ailleurs) définie par

$$g^{1/k}(t) = \alpha \cdot (M - t)\,, \quad \forall t \in [0, M].$$

   avec $\alpha > 0$ fixé de sorte que $\int_{\mathbb{R}^+} g = \int_{\mathbb{R}^+} f$.

   (a) *Montrer que si $f \ne g$, alors $g - f$ change de signe exactement une fois sur $[0, M]$ et étudier alors le signe de $g - f$.*

   (b) *Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} t^2 f(t)\, dt \ge \int_{\mathbb{R}^+} t^2 g(t)\, dt$.*

   (c) *Montrer que*

$$M^2 \le \frac{(k+2)(k+3)}{2} \cdot \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} t^2 f(t)\, dt}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f}.$$

2. *Soit K un corps convexe symétrique et $\theta \in S^{n-1}$ une direction fixée. On note $h_K(\theta) = \max\{x \cdot \theta;\ x \in K\}$. Montrer que*
$$h_K(\theta)^2 \leq (n+1)^2 \cdot \frac{\int_K (x\cdot\theta)^2\,dx}{|K|}.$$
3. *On dit qu'un corps convexe K de $\mathbb{R}^n$ est en position isotrope si $|K| = 1$ et si $\int_K (x\cdot\theta)^2\,dx$ ne dépend de $\theta \in S^{n-1}$; la constante d'isotropie L_K est alors définie par*
$$L_K^2 := \int_K (x\cdot\theta)^2\,dx\,, \quad \forall\theta \in S^{n-1}.$$
Montrer que si K est un corps convexe isotrope, son rayon $R(K) := \max\{|x|\ ;\ x \in K\}$ vérifie
$$R(K)\ \leq\ (n+1)L_K.$$

***Exercice 1.9* (Concentration de la mesure sur la sphère).** — *Le but de cet exercice est de montrer que l'inégalité de Brunn-Minkowski permet d'obtenir une inégalité de concentration pour les fonctions lipschitzienne sur la sphère S^{n-1}. On note σ, comme dans l'exercice 1.3, la mesure de probabilité usuelle sur la sphère S^{n-1}. On note par ailleurs m la mesure de Lebesgue restreinte à B_2^n et normalisée :*
$$m(\cdot) = \frac{|B_2^n \cap \cdot\,|}{|B_2^n|}.$$

1. *Montrer que pour tout $\Delta \subset S^{n-1}$ on a*
$$\sigma(\Delta) \geq m\Big(\bigcup_{t\in[\frac12,1]} t\Delta\Big) \geq \frac{1}{2}\sigma(\Delta)$$
2. *Soit $B \subset B_2^n$. Pour $\varepsilon \in [0,2]$ on introduit $C := \{x \in B_2^n\ ;\ d(x,B) \geq \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$ donné. Montrer que*
$$\frac{B+C}{2} \subset (1-\varepsilon^2/8)B_2^n$$
et en déduire que
$$m(\{x \in \mathbb{R}\ ;\ d(x,B) \leq \varepsilon\}) \geq 1 - \frac{1}{m(B)}e^{-n\,\varepsilon^2/4}$$
3. *Soit maintenant $A \subset S^{n-1}$ et $\varepsilon \in [0, \frac12]$. Montrer que*
$$\bigcup_{t\in[0,1]} t\cdot\{u \in S^{n-1}\ ;\ d(u,A) \leq 2\varepsilon\} \supset \{\,x \in B_2^n\ ;\ d(x, \bigcup_{t\in[\frac12,1]} tA) \leq \varepsilon\},$$
et en déduire que, pour $\varepsilon \in [0,1]$,
$$\sigma(\{u \in S^{n-1}\ ;\ d(u,A) \leq \varepsilon\}) \geq 1 - \frac{2}{\sigma(A)}e^{-n\,\varepsilon^2/16}$$
Cette inégalité est la célèbre inégalité de concentration sur la sphère. Le point essentiel est que lorsque n est grand, on peut choisir ε petit et avoir tout de même une grande

mesure. On préfère parfois énoncer le résultat en utilisant la distance « géodésique » sur S^{n-1}, à savoir

$$\delta(u,v) = \arccos(u \cdot v)\,, \quad \forall u, v \in S^{n-1}$$

Notez que $d(u,v) \leq \delta(u,v) \leq \frac{\pi}{2} d(u,v)$.

4. *Montrer que pour tout $n \geq 1$, tout $\varepsilon \in [0,\pi]$ et $A \subset S^{n-1}$ avec $\sigma(A) \geq \frac{1}{2}$ on a*

$$\sigma(\{u \in S^{n-1}\ ;\ \delta(u,A) \leq \varepsilon\}) \geq 1 - 2e^{-n\,\pi^2\varepsilon^2/4},$$

et que

$$\sigma(\{u \in S^{n-1}\ ;\ |u \cdot e_1| \leq \varepsilon\}) \geq 1 - 4e^{-n\,\pi^2\varepsilon^2/4}.$$

On obtient donc que la mesure σ se concentre autour d'un « equateur » (ou d'un grand cercle). Pour saisir le caractère surprenant de ce résultat, on peut prendre par exemple $\varepsilon_n = \frac{\log(n)}{n} \to 0$ pour lequel $\sigma(\{u \in S^{n-1}\ ;\ |u \cdot e_1| \leq \varepsilon_n\}) \to 1$.