CHAPITRE 4

NORMES ψ_α ET INÉGALITÉS DE TYPE KHINCHINE

Dans ce chapitre nous allons voir d'autres formes équivalentes des inégalités de déviation et de concentration. Si nous l'avons séparé du chapitre précédent, c'est que ces formes sont parfois utilisées pour des classes de fonctions autres que les fonctions lipschitziennes. De fait, la normalisation se fait souvent par la norme L^1 ou L^2 et non par la constante de lipschitz.

Exercice 4.1. — *Soit X un vecteur gaussien standard de $\mathbb{R}^n$. En utilisant que pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$ on a $-\log(1-t) \le 2t\log(2)$, montrer que*

$$\mathbb{E}\, e^{\frac{|X|^2}{2n}} \le 4$$

et en déduire que

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(\{|X| \ge t\}) \le 4\, e^{-t^2/(2n)}.$$

4.1. Normes ψ_α : formulations équivalentes

Dans ce chapître $\alpha \in [1, +\infty[$ est une constante donnée. Les deux cas qui nous intéresserons le plus dans la suite sont

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \alpha = 2.$$

On se donne une probabilité μ sur un espace mesurable X.

On introduit

$$L_{\psi_\alpha}(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{R}\ ;\ \exists c > 0,\ \int e^{c|f|^\alpha}\, d\mu < +\infty \right\}$$

et pour $f : X \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} := \inf \left\{ \lambda > 0\ ;\ \int e^{\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^\alpha}\, d\mu \le 2 \right\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Remarquez qu'on a

$$L_{\psi_\alpha}(\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R}\ ;\ \|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} < +\infty \right\}.$$

Plus précisément :

Exercice 4.2. — *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $c, C > 0$ deux constantes tel que*
$$\int e^{\left(\frac{|f|}{c}\right)^\alpha} d\mu \leq C.$$
Montrer qu'il existe une constante $\tilde{c}$ dépendant seulement de $\{c, C, \alpha\}$ (et donc ni de f ou de μ) tel que
$$\int e^{\left(\frac{|f|}{\tilde{c}}\right)^\alpha} d\mu \leq 2.$$
Mieux : montrer que $\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq c\,(\log(C))^{1/\alpha}$.

Remarquez que pour $f \in L_{\psi_\alpha}(\mu)$ non nul (μ-pp), l'infimum dans la définition de la norme devient un un minimum (par le théorème de convergence monotone) :
$$\int e^{\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)}}\right)^\alpha} d\mu \leq 2$$
Si $f \in L_{\psi_\alpha}(\mu)$ on dit parfois que f est $\psi_\alpha(\mu)$.

Les notations précédentes proviennent de la théorie de espaces de Orlicz. L'espace L_{ψ_α} est en effet l'espace de Orlicz associé à la fonction
$$\psi_\alpha(t) := e^{t^\alpha} - 1,$$
qui vérifie les propriétés suivantes : $\psi_\alpha : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ est continue, strictement croissante et convexe avec $\psi_\alpha(0) = 0$ et $\psi_\alpha(+\infty) = +\infty$. On a alors
$$\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} = \inf\left\{\lambda > 0\ ;\ \int \psi_\alpha\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1\right\}.$$

À titre culturel, mentionnons le résultat classique suivant :

Proposition 4.1. — *Avec les définitions ci-dessus, $L_{\psi_\alpha}(\mu)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_{\psi_\alpha(\mu)}$ est une norme sur cet espace. En fait, $(L_{\psi_\alpha}(\mu), \|\cdot\|_{\psi_\alpha(\mu)})$ est un Banach.*

Introduisons
$$N_{\psi_\alpha(\mu)}(f) := \sup_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{\|f\|_{L_p(\mu)}}{p^{1/\alpha}}.$$
Notez que, puisque les normes $\|\cdot\|_{L_p(\mu)}$ sont croissantes (comme fonction de $p \in]0, +\infty[$), on peut aussi bien définir le supremum pour les réels $p \in [1, +\infty[$, quitte à perdre une constante :
$$N_{\psi_\alpha(\mu)}(f) \leq \sup_{p \geq 1} \frac{\|f\|_{L_p(\mu)}}{p^{1/\alpha}} \leq 2^{1/\alpha} N_{\psi_\alpha(\mu)}(f) \leq 2N_{\psi_\alpha(\mu)}(f). \tag{4.1}$$
Il pourra nous arriver dans la suite de confondre les suprema sur $\mathbb{N}^*$ et sur $[1, +\infty[$.

On va montrer que (de manière universelle)
$$\|\cdot\|_{\psi_\alpha(\mu)}(\cdot) \simeq N_{\psi_\alpha(\mu)}(\cdot).$$
Plus précisement :

Lemme 4.2. — *Pour toute probabilité μ et toute fonction $f \in L_{\psi_\alpha}(\mu)$ on a*
$$\frac{1}{2} N_{\psi_\alpha(\mu)}(f) \leq \|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq 4e\, N_{\psi_\alpha(\mu)}(f).$$

Démonstration. — Nous allons montrer les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2^{1/\alpha}} N_{\psi_\alpha(\mu)}(f) \leq \|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq (4e\alpha)^{1/\alpha} N_{\psi_\alpha(\mu)}(f),$$

ce qui implique le résultat annoncé puisque, α étant plus grand que 1, on a $(\alpha e)^{1/\alpha} \leq e$ et $\frac{1}{2^{1/\alpha}} \geq \frac{1}{2}$. Pour l'inégalité de gauche, fixons $p \geq 1$ quelconque et remarquons qu'en utilisant l'inégalité de Jensen (μ proba) on a :

$$2 \geq \int e^{(f/\|f\|_{\psi_\alpha})^\alpha} \, d\mu \geq \int \frac{|f|^{\alpha p}}{p! \|f\|_{\psi_\alpha}^{\alpha p}} \, d\mu \geq \frac{\|f\|_{L_p(\mu)}^{\alpha p}}{p! \|f\|_{\psi_\alpha}^{\alpha p}}$$

et donc, en utilisant que $p^p \geq p!$,

$$2^{1/\alpha} \geq 2^{1/\alpha p} \geq \frac{\|f\|_{L_p(\mu)}}{p^{1/\alpha} \|f\|_{\psi_\alpha}},$$

ce qui donne le résultat annoncé. Pour l'inégalité inverse, fixons $\lambda \in \mathbb{R}$ et écrivons

$$\int e^{(f/\lambda)^\alpha} \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_{\alpha n}(\mu)}^{\alpha n}}{\lambda^{\alpha n} \, n!}.$$

On utilise alors l'estimation facile suivante (exercice)

$$\forall n \geq 1, \qquad n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On a alors (en toute rigueur on utilise (4.1) pour passer à un p non entier)

$$\int e^{(f/\lambda)^\alpha} \, d\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2 \, e \, \alpha \, N_{\psi_\alpha(\mu)}(f)^\alpha}{\lambda^\alpha} \right)^n,$$

et cette série géométrique est de somme inférieure à 2 si

$$\frac{2e \, \alpha \, N_{\psi_\alpha(\mu)}(f)^\alpha}{\lambda^\alpha} \leq \frac{1}{2}$$

ce qui est bien le cas pour

$$\lambda = (4e\alpha)^{1/\alpha} N_{\psi_\alpha(\mu)}(f).$$

□

On reformule et on complète le Lemme précédent comme suit.

Proposition 4.3. — *Étant donné une constante $c > 0$ et une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, considérons les deux propriétés suivantes :*

$$P(c) \quad : \quad \int e^{(|f|/c)^\alpha} \, d\mu \leq 2 \quad (\textit{c'est-à-dire } \|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq c)$$

$$Q(c) \quad : \quad \forall p \geq 1, \quad \|f\|_{L_p(\mu)} \leq c \, p^{1/\alpha}$$

Alors ces propriétés sont équivalentes au sens suivant :

$$P(c) \implies Q(2c)$$

$$Q(c) \implies P(4e\,c)$$

Par ailleurs, si on considère la propriété :

$$R(\lambda_0, C, c) \quad : \quad \forall r \geq \lambda_0, \quad \mu\left(\{|f| \geq r\}\right) \leq C \, e^{-r^\alpha / c^\alpha}$$

alors on a

$$P(c) \Longrightarrow R(0,2,c) \quad \textit{et} \quad R(\lambda_0, C, c) \Longrightarrow P(K) \quad \textit{où } K \textit{ ne dépend que de } \{\lambda_0, C, c\}.$$

Démonstration. — Seule la dernière implication reste à démontrer. Soit $\kappa > c$ que l'on fixera plus tard. On a alors, en utilisant le Fait 3.8,

$$\begin{aligned}
\int e^{\left(\frac{|f|}{\kappa}\right)^\alpha} d\mu &= 1 + \kappa^{-\alpha}\alpha \int_0^{+\infty} \mu\left(\{|f| \geq r\}\right) r^{\alpha-1} e^{\kappa^{-\alpha} r^\alpha}\, dr \\
&\leq e^{\kappa^{-\alpha}\lambda_0} + \kappa^{-\alpha}\alpha \int_{\lambda_0}^{+\infty} \mu\left(\{|f| \geq r\}\right) r^{\alpha-1} e^{\kappa^{-\alpha} r^\alpha}\, dr \\
&\leq e^{c^{-\alpha}\lambda_0} + \kappa^{-\alpha}\alpha C \int_{\lambda_0}^{+\infty} r^{\alpha-1} e^{-(c^{-\alpha}-\kappa^{-\alpha}) r^\alpha}\, dr. \\
&= e^{\kappa^{-\alpha}\lambda_0} + \frac{\kappa^{-\alpha}\alpha C e^{-(c^{-\alpha}-\kappa^{-\alpha})\lambda_0^\alpha}}{c^{-\alpha}-\kappa^{-\alpha}},
\end{aligned}$$

et cette dernière quantité est ≤ 2 à condition de prendre κ suffisamment grand (plus grand qu'une borne – que l'on pourrait calculer explicitement, mais cela n'aurait guère d'intérêt – ne dépendant que de $C, \tilde{C}, \lambda_0$). On pourrait aussi invoquer directement le résultat de l'exercice 4.2. □

Enfin, il y a une quatrième formulation équivalente du caractère ψ_α, qui (sans surprise !) repose sur l'estimation de la transformée de Laplace. Nous le laissons en exercice.

Exercice 4.3. — *Soit (X, μ) un espace de probabilité.*

1. *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $c_0, C > 0$. On suppose qu'on a l'inégalité gaussienne suivante :*
$$\forall \lambda \geq 0, \qquad \int e^{\lambda f}\, d\mu \leq C e^{c_0 \lambda^2/2}.$$
Montrer que f est $\psi_2(\mu)$ et que
$$\|f\|_{\psi_2(\mu)} \leq (4C+1)^{1/2}\, c_0.$$
2. *On s'intéresse à la réciproque. Montrer que si f est $\psi_2(\mu)$, alors, en notant $c_0 := \|f\|_{\psi_2(\mu)}$ on a*
$$\forall \lambda \geq 0, \qquad \int e^{\lambda f}\, d\mu \leq C e^{c_0 \lambda^2/2}$$
où la constante $C > 0$ dépend seulement de c_0.

Il faut être particulièrement vigilant au fait que ces équivalences sont données sous forme « non normalisées ». En pratique, on cherche des inégalités avec des constantes universelles pour une certaine classe de fonctions. Or typiquement, dans la Proposition, la constante c dépendra de f. Cela n'est pas très grave car les dépendances sont ici linéaires (on passe de c à $2c$, par exemple). Cependant, la bonne manière de faire est d'appliquer la proposition à une forme normalisée de f (pour laquelle la constante c sera universelle). Par exemple, en appliquant la Proposition à

$$\frac{f}{\|f\|_{L_1(\mu)}}.$$

on obtient :

Proposition 4.4. — *Soit* $c > 0$ *une constante donnée. On se donne une fonction* f *intégrable telle que*

$$\int \exp\left[\left(\frac{|f|}{c\|f\|_{L_1(\mu)}}\right)^\alpha\right] d\mu \le 2, \tag{4.2}$$

c'est-à-dire $\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \le c\|f\|_{L_1(\mu)}$. *Alors on a :*

$$\forall p \ge 1, \qquad \|f\|_{L_p(\mu)} \le 2c\,p^{1/\alpha}\,\|f\|_{L_1(\mu)} \tag{4.3}$$

La réciproque est également vraie, modulo un ajustement de la constante (comme dans le Lemme précédent).

Rappelons qu'on a toujours, par Jensen ou Hölder, puisque μ est une probabilité,

$$\forall p \ge 1, \qquad \|f\|_{L_1(\mu)} \le \|f\|_{L_p(\mu)},$$

Ainsi, l'inégalité (4.3) s'apparente à une forme inverse de l'inégalité de Hölder ; on dit que c'est une inégalité de « type Khintchine ». On cherche donc en général le plus grand $\alpha > 0$ possible pour lequel ces inégalités sont vérifiées.

Remarquez qu'une majoration triviale donne : pour toute fonction f,

$$(4.2) \implies \forall p \in [1,2], \quad \|f\|_{L_1(\mu)} \le \|f\|_{L_p(\mu)} \le 4c\,\|f\|_{L_1(\mu)} \tag{4.4}$$

ce qui donne en particulier l'équivalence entre les normes L_1 et L_2.

Parfois, on préfère normaliser par la norme L_2 car le calcul de $\|f\|_{L_2(\mu)}$ peut s'avérer plus aisé. Supposons que l'on ait

$$\int \exp\left[\left(\frac{|f|}{c\|f\|_{L_2(\mu)}}\right)^\alpha\right] d\mu \le 2,$$

ce qui est une condition plus faible que (4.2). La Proposition (4.3) dit qu'on a alors

$$\forall p \ge 1, \qquad \|f\|_{L_p(\mu)} \le 2c\,p^{1/\alpha}\,\|f\|_{L_2(\mu)}.$$

On peut remarquer que pour $p \in [1,2]$, on a toujours l'inégalité triviale $\|f\|_{L_p(\mu)} \le \|f\|_{L_2(\mu)}$. En ce sens, l'inégalité (4.3) est plus précise puisqu'elle donne aussi une inégalité inverse pour $p \in [1,2]$. Cependant, on peut récupérer une inégalité inverse pour $p \in [1,2]$ en interpolant entre les valeurs $p, 2, 4$ comme suit. Pour $p \in [1,2]$, soit $\theta \in [0,1]$ tel que

$$\frac{1}{2} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{4}$$

(On a $\theta = 2(2-p)/(4-p)$). Alors par l'inégalité de Hölder et l'inégalité précédente pour $p = 4$, on a

$$\|f\|_{L_2(\mu)} \le \|f\|_{L_p(\mu)}^{1-\theta}\|f\|_{L_4(\mu)}^{\theta} \le (2c\,4^{1/\alpha})^\theta \|f\|_{L_p(\mu)}^{1-\theta}\|f\|_{L_2(\mu)}^{\theta},$$

soit encore

$$\|f\|_{L_p(\mu)} \ge \frac{1}{(2c\,4^{1/\alpha})^{\theta/(1-\theta)}}\|f\|_{L_2(\mu)} \ge \frac{1}{(8c)^{\frac{4}{p}-2}}\|f\|_{L_2(\mu)} \ge \frac{1}{(8c)^2}\|f\|_{L_2(\mu)}.$$

Notez qu'on a encore l'équivalence des normes L_1 et L_2. Enonçons la version L_2 sous forme de Proposition :

Proposition 4.5. — *Soit $c > 0$ une constante donnée. On se donne une fonction $f \in L_2(\mu)$ telle que*

$$\int \exp\left[\left(\frac{|f|}{c\|f\|_{L_2(\mu)}}\right)^\alpha\right] d\mu \leq 2, \tag{4.5}$$

c'est-à-dire $\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq c\|f\|_{L_2(\mu)}$. Alors on a :

$$\begin{cases} \forall p \geq 2, & \|f\|_{L_p(\mu)} \leq 2c\, p^{1/\alpha}\, \|f\|_{L_2(\mu)} \\ \\ \forall p \in [1,2], & \frac{1}{(8c)^2}\|f\|_{L_2(\mu)} \leq \|f\|_{L_p(\mu)} \end{cases} \tag{4.6}$$

Puisque (4.6) entraîne (4.3) (avec des constantes légèrement différentes), on voit que la condition (4.5) (qui est plus faible que la condition (4.2)) est encore équivalente à l'inégalité (4.3).

Notez que l'argument précédent indique que la deuxième inégalité de (4.6) se déduit de la première (appliqué avec $p = 4$) et de Hölder. En fait, cet argument montre que la deuxième inégalité est valable pour $p \in]0, 2]$, mais la constante $\frac{1}{(8c)^{\frac{4}{p}-2}}$ explose lorsque $p \to 0$ (on ne peut trouver par cette méthode une constante numérique valable pour tous les $p \in [0, 1]$).

Les propositions précédentes donnent la meilleure dépendance (asymptotique) possible en p dans (4.3) sous l'hypothèse (4.2) ou (4.5), comme le montre l'exercice suivant :

Exercice 4.4. — *On travaille avec la mesure gaussienne γ_n sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. On étudiera successivement le cas des fonctions*

$$f(x) = x \cdot \theta \ (|\theta| = 1 \text{ fixé}) \qquad \text{et} \qquad f(x) = |x|.$$

1. *Quel est le plus grand α pour lequel $f \in L_{\psi_\alpha}(\gamma_n)$.*
2. *Montrer que pour $p \to \infty$:*

$$\log\left(\frac{\|f\|_{L_{2p}(\gamma_n)}}{\|f\|_{L_2(\gamma_n)}}\right) \sim \log(\sqrt{2p})$$

Nous insistons encore une fois que, dans les équivalences entre différentes caractérisations du caractère ψ_α, il convient de se ramener au cas où les constantes $C, \tilde{C}, \lambda_0$ sont « universelles » (en général ce sont de braves constantes numériques). Voici par exemple une reformulation avec une normalisation L_2.

Proposition 4.6. — *Soit $C, \tilde{C}, \lambda_0 > 0$trois constantes, μ une probabilité sur X et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\forall \lambda \geq \lambda_0, \qquad \mu\left(\{|f| \geq \| f\|_{L_2(\mu)}\, \lambda\}\right) \leq \tilde{C}e^{-C\lambda^\alpha}. \tag{4.7}$$

Alors, il existe une constante $c = c(C, \tilde{C}, \lambda_0)$ ne dépendant que des constantes $C, \tilde{C}, \lambda_0$ tel que,

$$\int \exp\left[\left(\frac{|f|}{c\|f\|_{L_2(\mu)}}\right)^\alpha\right] d\mu \leq 2,$$

c'est-à-dire $\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq c\|f\|_{L_2(\mu)}$.

On a encore trivialement, qu'inversement, si $\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq c\|f\|_{L_2(\mu)}$, alors

$$\forall \lambda > 0, \qquad \mu\left(\{|f| \geq c\,\|f\|_{L_2(\mu)}\,\lambda\}\right) \leq 2e^{-\lambda^\alpha}.$$

En mettant bout à bout les Propositions 4.6 et 4.5, on passe donc d'une inégalité de la forme (4.7) à une inégalité de type Khintchine (4.6). On peut vérifier (exercice) qu'en fait, on peut passer directement de l'une à l'autre (sans passer par l'étude de la norme ψ_α). Voir les calcul après la Proposition 3.10.

4.2. Inégalités de type Khintchine

4.2.1. Inégalités gaussiennes. — Le cas gaussien n'est pas très intéressants car les quantités se calculent explicitement, comme vu à l'exercice 4.4. Nous le réécrivons rapidement simplement car cela permet de voir le type d'inégalité qui nous intéresse et le raisonnement pour y aboutir.

Soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non-nul fixé. Dans la suite, $g_1, \ldots, g_n$ désigneront des variables aléatoires gaussiennes standard indépendantes, de sorte $X = (g_1, \ldots, g_n)$ est un vecteur gaussien standard de $\mathbb{R}^n$. La fonction

$$f_u(x) = x \cdot u$$

appartient à $L_{\psi_2}(\gamma_n)$ et on a

$$\int e^{(x\cdot u/(2|u|))^2}\, d\gamma_n(x) = \int e^{(x\cdot \frac{u}{|u|})^2/4}\, d\gamma_n(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{x_1^2/4}\gamma(x_1) = \sqrt{2} \leq 2,$$

ce qui donne que

$$\|f_u\|_{\psi_2(\gamma_n)} \leq 2|u| = 2\|f_u\|_{L_2(\gamma_n)}.$$

En fait, le calcul donne exactement

$$\|f_u\|_{\psi_2(\gamma_n)} = \frac{2}{\sqrt{3}}|u| = \frac{2}{\sqrt{3}}\|f_u\|_{L_2(\gamma_n)}.$$

On peut écrire

$$\|f_u\|_{L_p(\gamma_n)} = (\mathbb{E}\,|X\cdot u|^p)^{1/p} = \left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1^n} u_i\, g_i\right|^p\right)^{1/p}$$

Ainsi, par la Proposition 4.5 on a :

Proposition 4.7. — *Soit $g_1, \ldots, g_n$ des variables aléatoires gaussiennes standard indépendantes. Alors pour tout $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\forall p \geq 2, \quad \left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n a_i\, g_i\right|^p\right)^{1/p} \leq 4\sqrt{p}\,\left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n a_i\, g_i\right|^2\right)^{1/2}.$$

Évidemment, ce que nous venons de faire est absolument ridicule, puisque ce résultat s'obtient par un calcul direct ; on est même ramené à un calcul en dimension 1 (ce qui limite en fait l'intérêt de cette observation) puisque

$$\|f_u\|_{L_p(\gamma_n)} = \gamma(p)|u| \quad \text{avec} \quad \gamma(p) = \|f_{e_1}\|_{L_p(\gamma_n)} = \left(\int |t|^p \, d\gamma_1(t) \right)^{1/p}.$$

Exercice 4.5. — *Soit $\{g_1, \dots, g_n\}$ des variables aléatoires gaussiennes standards (pas nécessairement indépendantes). En utilisant le caractère ψ_2 de g_i (c'est-à-dire que de $t \to t$ est dans $L_{\psi_2}(\gamma_1)$ avec une norme ψ_2 contrôlée par la norme L_2) et le fait que ℓ_∞^n est universellement équivalent à une certaine norme ℓ_p^n, retrouver que*

$$\mathbb{E} \sup_{1 \le i \le n} |g_i| \le C \sqrt{\log n}$$

pour une certaine constante numérique $C > 0$.

On peut suivre la même chaîne de déduction pour la fonction

$$f(x) = |x|.$$

Le calcul de la norme $\psi_2(\gamma_n)$ donne, en utilisant que $e^t \ge 1 + t/2$ pour $t \in [-1, 0]$

$$\|f\|_{\psi_2(\gamma_n)} = \left[1 - e^{-\log(2)/(2n)}\right]^{-1/2} \le \sqrt{\frac{4n}{\log(2)}} \le 2\sqrt{n} = 2\|f\|_{L_2(\gamma_n)}.$$

Proposition 4.8. — *Soit $g_1, \dots, g_n$ des variables aléatoires gaussiennes standard indépendantes. Alors si $e_1, \dots, e_n$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ on a*

$$\forall p \ge 2, \qquad \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n g_i \, e_i \right|^p \right)^{1/p} \le 4\sqrt{p} \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n g_i \, e_i \right|^2 \right)^{1/2} = 4\sqrt{p}\,\sqrt{n}.$$

Ici encore, tout se calcule explicitement, mais cette fois-ci les calculs sont n-dimensionnels. On voit ici un trait important des inégalités de type Khintchine : l'inégalité est indépendante de n (c'est-à-dire du nombre de termes dans la sommes, ce qui indique qu'on peut passer à des séries aléatoires).

Par contre, dans le cas ci-dessous, on peut en fait montrer des inégalités bien meilleures pour $p \le \sqrt{n}$ (car le caractère ψ_2, que l'on avait déjà obtenu dans le premier exercice, est plus faible que ce que donne la concentration, par exemple).

4.2.2. Inégalités sur le cube discret et pour des Bernoulli indépendantes. — On note σ_n la mesure de probabilité uniforme sur le cube discret $\Omega_n = \{-1, 1\}$. On adoptera la notation probabiliste : si $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ sont n variables de Bernoulli ± 1 indépendantes, alors pour toute $f : \Omega_N \to \mathbb{R}$ et $I \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \int f \, d\sigma_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{f(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n) \in I\}) = \sigma_n(x \in \Omega_n \ ; \ f(x) \in I\}).$$

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, et introduisons la fonction $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = a_1 x_1 + \dots a_n x_n.$$

Alors notons que

$$\|f\|^2_{L_2(\sigma_n)} = \mathbb{E}f^2(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n) = a_1^2 + \dots a_n^2 = |a|^2 = \|a\|_2.$$

Ainsi, l'inégalité (3.9) s'écrit :

$$\forall r > 0, \quad \sigma_n\big(\{|f| \geq \| f\|_{L_2(\sigma_n)}\, r\}\big) \leq 2e^{-r^2/8}.$$

Ainsi, en combinant les Propositions 4.6 et 4.5 on obtient :

***Théorème 4.9* (Inégalités de Khintchine).** — *Il existe une constante numérique $C > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, si $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont n variables de Bernoulli ± 1 indépendantes et $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$, alors*

$$\forall p \geq 2, \qquad \left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n a_i\,\varepsilon_i\right|^p\right)^{1/p} \leq C\sqrt{p}\,\left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n a_i\,\varepsilon_i\right|^2\right)^{1/2} = C\sqrt{p}\,\|a\|_2,$$

$$\forall p \in [1,2], \qquad \frac{1}{C}\left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n a_i\,\varepsilon_i\right|^2\right)^{1/2} \leq \left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n a_i\,\varepsilon_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

Ce qu'il y a de particulièrement intéressant dans ce résultat, c'est que l'équivalence des normes est indépendante de n. Soit $(\omega \to \varepsilon_i(\omega))_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$. Notons que les $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ forment une famille orthonormée de $L_2(\Omega, \mathbb{P})$. On peut considérer l'espace vectoriel des variables aléatoires engendrées par ces variables :

$$\mathrm{vect}(\{\varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \bigcup_{n\geq 0}\{\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i\ ;\ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} \subset L_\infty(\Omega, \mathbb{P}).$$

Le théorème précédent entraine que toutes les normes L_p, $p \in [1, +\infty[$, sont équivalentes sur cet espace. Plus précisément, considérons l'application (linéaire)

$$\begin{aligned} \ell_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L_2(\Omega, \mathbb{P}) \\ (a_n) &\longrightarrow \phi\big((a_n)\big) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varepsilon_n. \end{aligned}$$

Cette application est bien définie. La convergence n'est pas normale (car $\|a_n\varepsilon_n\|_{L_2(\mathbb{P})} = |a_n|$), mais le critère de Cauchy est immédiat, puisque

$$\left\|\sum_{n=p}^{q} a_n\varepsilon_n\right\|^2_{L_2(\mathbb{P})} = \sum_{n=p}^{q} a_n^2.$$

On voit que ϕ est une isométrie sur son image :

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varepsilon_n\right\|^2_{L_2(\mathbb{P})} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2.$$

Posons

$$\mathcal{R} := \phi\big(\ell_2(\mathbb{R})\big).$$

Alors, $\mathcal{R}$ est un sous-espace fermé de $L_2(\mathbb{P})$ isométrique à $\ell_2(\mathbb{R})$, sur lequel les normes $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{P})}$ avec $p \geq 1$ sont toutes équivalentes (en particulier $\mathcal{R}$ est fermé dans tous les $L_p(\mathbb{P})$). De manière équivalente, on peut dire que, pour tout $p \geq 1$, les espaces $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{L_p(\mathbb{P})})$ et $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{L_2(\mathbb{P})})$ sont isomorphes. Le cas $p = \infty$ est évidemment (?) à part :

Exercice 4.6. — *Montrer que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varepsilon_n \in L_\infty(\mathbb{P})$ *si et seulement si* $(a_n) \in \ell_1(\mathbb{R})$.

Exercice 4.7. — *Soit* $g_1, \ldots, g_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *des variables indépendantes (définies sur un certain espace de probabilité* $(\Omega, \mathbb{P})$*) avec pour* $i \leq n$, g_i *gaussienne standard et* ε_i *Bernoulli* ± 1.

1. *Montrer que* $\varepsilon_1|g_1|$ *est encore une variable gaussienne standard.*
2. *Montrer que pour* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *on a, pour tout* $p \geq 1$

$$\|\sum_{i=1}^{n} g_i a_i\|_{L_p(\Omega,\mathbb{P})} \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i\|_{L_p(\Omega,\mathbb{P})},$$

et expliquer comment l'inégalité de Khintchine pour les Bernoulli peut se déduire de celle pour les variables gaussiennes.

Les inégalités de Khintchine peuvent aussi s'interpréter comme des plongements isomorphes, par exemple de ℓ_2 dans ℓ_1. Supposons que $n = 2^k$ $(k = \log_2(n))$ et considérons l'application

$$T : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\{-1,1\}^k}$$

définie, pour $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$, par $T(a) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\{-1,1\}^k}$ donné par

$$T(a)(\varepsilon) := \sum_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i. \tag{4.8}$$

où l'on voit chaque $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \{-1, 1\}^k$ comme un indice de coordonnée. On a alors

$$\|T(a_1, \ldots, a_k)\|_{\ell_p^n} = n^{1/p}\|T(a_1, \ldots, a_k)\|_{L_p(\sigma_n)}.$$

L'inégalité de Khitchine pour $p = 1$ nous dit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout k :

$$\forall a \in \mathbb{R}^k, \quad \frac{\sqrt{n}}{C}\|Ta\|_{\ell_2^n} \leq \|Ta\|_{\ell_1^n} \leq \sqrt{n}\|Ta\|_{\ell_2^n}$$

Remarquons que pour un n général on peut considérer $k = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ puis, pour $n' = 2^k \leq n$, plonger trivialement $\mathbb{R}^{n'}$ dans $\mathbb{R}^n$. On a donc :

Proposition 4.10. — *Il existe une constante numérique* $C > 0$ *telle que : pour tout* $n \geq 1$, *l'application* $T : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{2^k} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ *définie pour* $k = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ *par* (4.8) *est telle que sur l'espace* k*-dimensionnel* $E = T(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$ *on a*

$$\forall x \in E, \qquad \frac{\sqrt{n}}{C}\|x\|_{\ell_2^n} \leq \|x\|_{\ell_1^n} \leq \sqrt{n}\|x\|_{\ell_2^n}$$

Comme, pour $a \in \mathbb{R}^k$, $\|T(a_1, \ldots, a_k)\|_{\ell_2^n} = \sqrt{n}\|a\|_{\ell_2^k}$, on peut aussi dire que T est un C-plongement de ℓ_2^k dans ℓ_1^n :

$$\forall a \in \mathbb{R}^k, \quad \frac{n}{C}\,\|a\|_{\ell_2^k} \le \|Ta\|_{\ell_1^n} \le n\,\|a\|_{\ell_2^k}.$$

Théoriquement, ce résultat est moins fort que le théorème de Dvoretzky pour ℓ_1^n puisque d'une part le résultat n'est pas presque isométrique (on ne peut obtenir une distortion de type $1+\varepsilon$ mais seulement une distorsion bornée, c'est-à-dire tout de même indépendante de n) et surtout parce que la dimension est beaucoup plus petite : $\log(n)$ contre λn. Mais ce qu'on a gagné c'est que la construction est explicite. Dans le théorème de Dvoretzky, l'application T est construite par un procédé aléatoire, alors qu'ici T est déterministe et donnée explicitement par (4.8). Très récemment, d'autres constructions explicites ont été obtenues permettant d'arriver presque jusqu'à la dimension optimale λn.

4.2.3. Inégalités pour des probabilités log-concaves sur $\mathbb{R}^n$. —

Sauriez-vous montrer directement le résultat suivant :

Exercice 4.8. — *Il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $n \ge 1$ et toute mesure log-concave μ sur $\mathbb{R}^n$ on a :*

$$\int |x|\,d\mu(x) \le \left(\int |x|^2\,d\mu(x)\right)^{1/2} \le c\int |x|\,d\mu(x).$$

On se donne une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^n$ log-concave (sans perte de généralité, on peut supposer que μ est une mesure à densité log-concave). On rappelle que le prototype de mesure log-concave est la mesure de Lebesgue restreinte à un convexe. Ainsi, si K est un corps convexe, alors la mesure donnée par

$$\forall A \subset \mathbb{R}^n \qquad \lambda_K(A) = \frac{|A \cap K|}{|K|}$$

est une probabilité (à densité) log-concave.

Le Lemme de Borell et ses conséquences, vues au premier chapitre, nous disent que si μ est une probabilité log-concave et si F est une semi-norme sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\forall r > 1, \qquad \mu\left(\left\{F \ge 4\|F\|_{L_1(\mu)}\,r\right\}\right) \le e^{-r/2}.$$

Notez que puisque μ est une probabilité et que $1 \le 2\,e^{-1/2}$, l'inégalité précédente donne aussi que

$$\forall r \ge 0, \qquad \mu\left(\left\{F \ge 4\|F\|_{L_1(\mu)}\,r\right\}\right) \le 2\,e^{-r/2}.$$

On a donc une estimée ψ_1 (et même uniforme sur toute les probabilité log-concave) :

$$\|F\|_{\psi_1(\mu)} \le C\|F\|_{L_1(\mu)} \le C\|F\|_{L_2(\mu)}.$$

où C est une constante numérique. On en déduit :

Théorème 4.11. — *Il existe une constante numérique $c > 0$ tel que : pour tout $n \ge 1$ toute probabilité log-concave μ sur $\mathbb{R}^n$ et toute une semi-norme F sur $\mathbb{R}^n$ on a :*

$$\forall p \ge 1, \qquad \|F\|_{L_p(\mu)} \le c\,p\,\|F\|_{L_1(\mu)}$$

Le cas typique d'application est lorsqu'on prend pour μ la mesure de Lebesque restreinte à un corps convexe et pour F une des fonction suivantes :

$$F(x) = |x| \quad \text{ou} \quad F(x) = x \cdot \theta \ (\theta \text{ fixé}).$$

Par exemple, si K est un corps convexe de volume 1 ($K| = 1$) on a : pour toute direction $\theta \in S^{n-1}$

$$\left(\int_K |x \cdot \theta|^p \, dx\right)^{1/p} \leq cp \int_K |x \cdot \theta| dx \leq cp \left(\int_K |x \cdot \theta|^2 \, dx\right)^{1/2}. \tag{4.9}$$

et

$$\left(\int_K |x|^p \, dx\right)^{1/p} \leq cp \int_K |x| \, dx \leq cp \left(\int_K |x|^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

En plaçant K dans une « bonne » position, on peut remplacer cette dernière estimée ψ_1 par une estimée ψ_2.