Chapitre 2

Exo 2.1

$$Z = \sup_{t \in T} X_t = \sup_{i \leq k} BG \cdot e_i = F(G)$$

1) $\mathbb{P}(Z \in A) = \mathbb{P}(F(G) \in A) = \gamma_k(\{x \in \mathbb{R}^k ; F(x) \in A\})$

2) $F(x) = \|Bx\|_{\ell_\infty^k}$ d'où le résultat (voir cours)

$\hookrightarrow \|F\|_{Lip} \leq \|B\|_{\ell_2^k \to \ell_\infty^k}$

Par ailleurs

$$\|B\|_{\ell_2^k \to \ell_\infty^k} = \sup_{\sum a_j^2 = 1} \sup_{i \leq k} \sum_{j} B_{ij} a_j$$

$$= \sup_{i \leq k} \sqrt{\sum_{j \leq k} B_{ij}^2}$$

Enfin pour t_i $\mathbb{E} X_{t_i}^2 = \mathbb{E}(BG)_i^2 = \mathbb{E}(BG \cdot e_i)^2 = \mathbb{E}(G \cdot B^* e_i)^2$

$$= |B^* e_i|^2$$

$$= \sum_j B_{ij}^2$$

D'où

$$\sigma = \|B\|_{\ell_2^k \to \ell_\infty^k}$$

3) Comme dans le cours (Concentration gaussienne usuelle)

Exo 2.2

1) $$\int_{\mathbb{R}^n} (|x| - m)^2 \, d\gamma_n = 2 \int \mathbb{P}(|X| - m \geq r) \, dr$$

$$\leq 4 \int_0^\infty r e^{-r^2/4} = 8$$

Par ailleurs $\int_{\mathbb{R}^n} (|x| - m)^2 \, d\gamma_n = \int |x|^2 \, d\gamma_n - m^2$

d'où le résultat

2) $$\int_{\mathbb{R}^n} |x| \, d\gamma_n(x) \geq \int_{\mathbb{R}} |x| \, d\gamma_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3) On arrange les constantes ...

②

4) a) $\mathbb{E}|X|^4 = \int \left(\sum x_i^2\right)^2 d\gamma_n(x) \leq n^2 \int_{\mathbb{R}} t^4 d\gamma_1(t) = 3n^2$

b) $2 \in [1,4]$ (ouah!)

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times 1$$

Donc par l'inégalité de Hölder

$$\underbrace{\left(\mathbb{E}|X|^2\right)^{1/2}}_{= n} \leq \Big[\underbrace{\left(\mathbb{E}|X|^4\right)}_{\leq 3n^2}{}^{1/4}\Big]^{\frac{2}{3}} \Big[\underbrace{\left(\mathbb{E}|X|\right)}_{m}\Big]^{1/3}$$

$$\text{d'où } m \geq \frac{1}{\sqrt{3}} n$$

<u>Exo2.4</u> (Dvoretzky - Rogers)

1) La fonction $u \to |\det(u)|$ est continue sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (quelque soit la norme)
et atteint donc son sup sur le compact
$\{ \|u\|_{\ell_2^n \to E} \leq 1 \}$
Le sup n'étant pas 0, il est atteint sur un élément inversible
Donc $u \to |\det(u)|$ atteint son sup sur l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{ u \in Gl_n(\mathbb{R}) ; \|u\|_{\ell_2^n \to E} \leq 1 \}$$

2) Remarquons que pour $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$

$$\|u\|_{\ell_2^n \to E} \leq 1 \iff \forall x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \leq 1 \Rightarrow \|u(x)\|_K \leq 1$$
$$\iff u(B_2^n) \subset K$$

Donc pour $u \in \mathcal{A}$, $B_2^n \subset u^{-1}(K)$.

Soit u_0 un élément de A où $|\det(\cdot)|$ atteint son sup.

et posons $\tilde{K} := u_0^{-1}(K)$

Alors on a : $B_2^n \subset \tilde{K}$

Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde inclus dans $\tilde{K}$: $\mathcal{E} \subset \tilde{K}$

$\mathcal{E}$ s'écrit $\mathcal{E} = v(B_2^n)$ avec $v \in GL(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
v(B_2^n) \subset \tilde{K} &\Leftrightarrow (u_0 \circ v)(B_2^n) \subset K \\
&\Rightarrow u_0 \circ v \in A \\
&\Rightarrow |\det(u_0 \circ v)| \leq |\det(u_0)| \\
&\Rightarrow |\det(v)| \leq 1 \\
&\Rightarrow |\mathcal{E}| \leq |B_2^n|
\end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{K}$ est en position de John.

3) $\det\left(I + \frac{\varepsilon}{\|v\|} v\right) = 1 + \frac{\varepsilon}{\|v\|} \operatorname{tr}(v) + o(\varepsilon)$ pour $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $v \neq 0$ fixé.

$\boxed{\text{Notation: } \|v\| = \|v\|_{\ell_2^n \to E_K}}$

Comme $\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| \leq 1$

on a, pour $u \in GL_n(\mathbb{R})$ $\frac{u}{\|u\|} \in A$

et donc $\left|\det\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right| \leq |\det Id| = 1$

càd $\underline{|\det(u)| \leq \|u\|^n}$

Cette inégalité est également vraie si u n'est pas inversible. Donc elle est vérifiée $\forall u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

On a donc

$$\begin{aligned}
1 + \frac{\varepsilon}{\|v\|} \operatorname{tr}(v) + o(\varepsilon) &\leq \left\| Id + \frac{\varepsilon}{\|v\|} v \right\|^n \\
&\leq (1+\varepsilon)^n \quad \text{car } \underline{\underline{\|Id\| \leq 1}} \text{ car } B_2^n \subset K \\
&= 1 + n\varepsilon + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\operatorname{tr}(v) \leq n\|v\|}$

Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension i et $P = P_{F^\perp}$

Pour une projection on a : $\text{tr}(P) = \dim(\text{Im} P)$

Donc $\text{tr}(P) = n-i$

Par conséquent $\|P\|_{\ell_2^n \to E_k} \geq \frac{n-i}{n}$

4) On remarque que $\partial B_2^n \cap \partial K = \emptyset$ car, comme $B_2^n \subset K$, si l'intersection n'était vide, on pourrait considérer rB_2^n avec $r > 1$ (proche de 1) qui resterait dans K, ce qui est impossible car $|rB_2^n| > |B_2^n|$ si $r>1$.

Donc $\exists\, w_1 \in \mathbb{R}^n$ tq $\|w_1\|_K = |w_1| = 1$

On le choisit comme premier vecteur de la base.

Supposons avoir construit $\{w_1, \dots, w_k\}$, $k \geq 1$, vérifiant les hypothèses (ie la famille orthonormée avec $\|w_i\|_K \geq \frac{n-i+1}{n}$)

Posons $F = \text{vect}(w_1, \dots, w_k)$
$\dim F = k$

On sait que $\|P_{F^\perp}\|_{\ell_2^n \to E_k} \geq \frac{n-k}{n}$

Soit $w_{k+1} \in S^{n-1}$, $(|w_{k+1}| = 1)$ tq $w_{k+1} \perp F$ et

$$\|P_{F^\perp}(w_{k+1})\|_K = \|w_{k+1}\|_K$$

Alors on a bien $\|w_{k+1}\|_K \geq \frac{n-k}{n} = \frac{n-(k+1)+1}{n}$
et $w_{k+1} \perp F$, $|w_{k+1}| = 1$

On construit donc la base par récurrence.

On travaille avec la base orthonormée $\{w_1, -, w_n\}$ précédente. ⑤

5) Comme la mesure gaussienne est invariante par la symétrie

$$x \longrightarrow x - 2(x\cdot w_i)\,w_i \quad (\text{symétrie \% hyperplan } w_i^{\perp})$$

On a, pour tout choix de signe $\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|\, d\gamma_n = \int_{\mathbb{R}^n} \Big\|\sum_{i=1}^n t_i w_i\Big\|\, d\gamma_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i t_i w_i\Big\|\, d\gamma_n(t)$$

$x = \sum t_i w_i$

$t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|\, d\gamma_n(x) = \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i t_i w_i\Big\|\, d\gamma_n(t)$$

or :

on isole $\varepsilon_1 = \pm 1$

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon} \|\sum \varepsilon_i t_i v_i\| = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{(\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n)\\ \in \{-1,1\}^{n-1}}} \Big(\frac{1}{2} \Big\|t_1 w_1 + \sum_{i\geq 2} \varepsilon_i t_i w_i\Big\| + \frac{1}{2}\Big\|-t_1 w_1 + \sum_{i \geq 2} \varepsilon_i t_i w_i\Big\| \Big)$$

convexité de $\|\cdot\|$

$$\geq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{(\varepsilon_2 - \varepsilon_n)\\ \in \{-1,1\}^{n-1}}} \|t_1 w_1\|$$

$$= \|t_1 w_1\|$$

On peut faire le même raisonnement pour toutes les coord.

Donc

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \|\sum \varepsilon_i t_i v_i\| \geq \max_{1 \leq i \leq n} \|t_i w_i\|$$

$$\geq \max_{i \leq [\frac{n}{2}]} \|t_i w_i\|$$

$$\geq \frac{1}{2} \max_{i \leq [\frac{n}{2}]} |t_i|$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\| \, d\gamma_n(x) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |t_i| \, d\gamma_n(t)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \|t\|_{\ell_\infty^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \, d\gamma_n(t)$$

espérance de la norme ℓ_∞ d'un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

$$\geq \frac{1}{2} c \sqrt{\log(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor)}$$

$$\geq c \sqrt{\log(n)}$$

~~Rk~~

Si K est en position de John on a :

$$\|x\|_K \leq |x|$$

donc, on en déduit que la constante de Dvoretzky-Milman vérifie $k(K) \geq c \log(n)$