

# Chapitre 1

①

## Exo 1.1

Soit  $q \geq p \geq 1$ . On introduit  $r > 0$  tel que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$$

L'inégalité de Hölder (Peut-on l'appliquer ?) donne, pour  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \cdot 1^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n 1^r \right)^{1/r} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{1/q}$$

Et donc  $\|x\|_{l_p^n} \leq n^{1/p - 1/q} \|x\|_{l_q^n}$

Par ailleurs, on a toujours  $\|x\|_{l_q^n} \leq \|x\|_{l_p^n}$ . En effet, par homogénéité il suffit de le voir pour  $\|x\|_{l_p^n} = 1$ . En utilisant que  $|x_i| \leq 1$  et que donc  $|x_i|^q \leq |x_i|^p$ , on obtient bien que  $\sum |x_i|^q \leq 1$ .

On a donc

$$(*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_{l_q^n} \leq \|x\|_{l_p^n} \leq n^{1/p - 1/q} \|x\|_{l_q^n}$$

Par ailleurs, chaque inégalité est optimale

→ Il y a égalité à gauche si  $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$

→ Il y a égalité à droite si  $x = (1, 1, 1, \dots, 1)$

On tire de cela que  $d_g(l_p^n, l_q^n) = n^{1/p - 1/q}$

(On remarque que cette distance tend vers  $+\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ )

En fin (\*) donne:

$$\|x\|_{l_\infty^n} \leq \|x\|_{l_p^n} \leq n^{1/p} \|x\|_{l_\infty^n}$$

Pour  $p = \log n$  on a

$$n^{1/\log n} = e, \text{ ce qui montre la proposition}$$

du cours

□

### Exo 1.3

(2)

1) L'intégration en polaire s'écrit  $\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_0^\infty \int_{S^{n-2}} f(ru) r^{n-2} d\tilde{\sigma}(u)$

Par conséquent, il existe une constante  $C_n > 0$  tq  $\forall f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = C_n \int_0^\infty \int_{S^{n-2}} f(ru) r^{n-2} d\tilde{\sigma}(u)$$

Pour  $f = \mathbb{1}_{B_2^n}$  on trouve  $V_n = C_n \int_0^1 r^{n-2} dr = \frac{1}{n} C_n$

Pour  $f(r) = e^{-\frac{1}{2}r^2}$  on trouve  $\text{Donc } \boxed{C_n = nV_n}$

$$(\sqrt{2\pi})^n = nV_n \int_0^\infty r^{n-2} e^{-r^2/2} dr \quad r = \sqrt{2t}$$

$$= nV_n 2^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$= nV_n 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

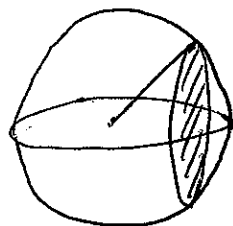
Et donc

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

2) L'équivalent s'obtient par Stirling

En particulier  $V_n^{1/n} \sim \sqrt{\frac{2\pi e}{n}}$

3)



$$\begin{aligned} g_n(t) &= \left(\sqrt{\Omega_n^2 - t^2}\right)^{n-2} V_{n-2} \\ &= \Omega_n^{n-2} V_{n-2} \left(1 - \left(\frac{t}{\Omega_n}\right)^2\right)^{n-2} \\ &\sim \sqrt{e} e^{-\pi e t^2} \end{aligned}$$

$$|B_n \cap \{|x_2| \leq \frac{1}{2}\}| = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g_n(t) dt \sim \sqrt{e} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-\pi e t^2} dt$$

$$\approx 0.951\dots \geq 0.96$$

Remarques sur l'exercice 1

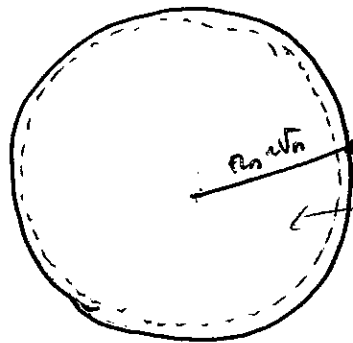
Si on veut une boule euclidienne  $B_n = r_n B_2^n$  de volume 1, il faut que le rayon  $r_n$  soit "de l'ordre  $\sqrt{n}$ " et plus précisément  $r_n \sim c\sqrt{n}$  (C constante numérique égale ici à  $\frac{1}{\sqrt{\pi e}}$ )

En particulier, pour  $r < r_n$ ,  $|r B_2^n| = (\frac{r}{r_n})^n$  et très petit

Par exemple, si on prends  $\tilde{r}_n = \frac{r_n}{\log(n)} = \frac{c\sqrt{n}}{\log(n)} \rightarrow +\infty$

On a:  $| \tilde{r}_n B_2^n | = \left(\frac{1}{\log(n)}\right)^n = e^{-n \log(\log(n))} \leq e^{-n} \rightarrow 0$   
 très très petit très vite!

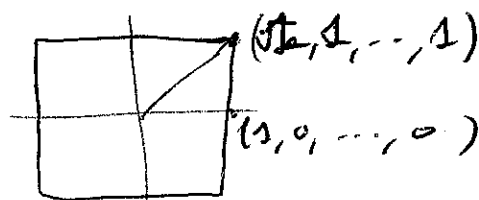
Ainsi la mesure de  $B_n$  se "concentre" au voisinage de son bord (la sphère de rayon  $r_n$ )



presque toute la mesure sur  $r B_2^n$  avec  $r < r_n$  toute la masse est près du bord.

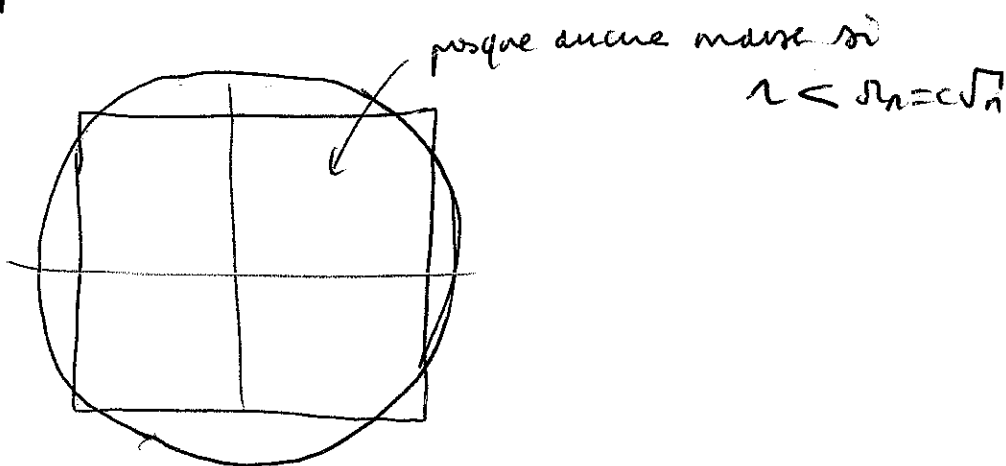
Regardons maintenant

$$B_n^\infty = [-1, 1]^n$$

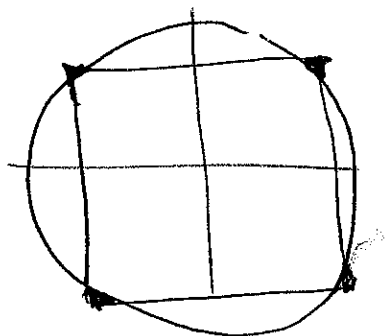


Remarquons que  $| \frac{1}{2} B_{\infty}^n | = | [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n | = 1$  et pourant les sommets  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  ont une norme =  $\frac{\sqrt{n}}{2}$  et donc ils partent à  $+\infty$

Par ailleurs,  $|\mathcal{R}B_2^n \cap B_\infty^n| \leq |\mathcal{R}B_2^n|$  et très petit ④  
 pour  $r < r_n \approx c\sqrt{n}$



Donc pour que  $|\mathcal{R}B_2^n \cap B_\infty^n|$  soit proche de  $|B_2^n| = 2^n$   
 il faut que  $r \gtrsim c\sqrt{n}$



Toute la masse du cube  $B_\infty^n$  se situe près  
 des arêtes (ce sont les seuls bords qui sont près de  
 la sphère de rayon  $c\sqrt{n}$ )

### Exo 1.5

Pour  $\theta$  une direction fixée, la fonction  $t \rightarrow f_{k,\theta}(t)$  est  
 une fonction log-concave ( $t \rightarrow -\log f_{k,\theta}(t)$  convexe) et  
 paire. Une fonction convexe paire atteint son minimum en  
 l'origine.

### Exo 1.6

- Par (BM) et la convexité de  $C$ ,  $x \rightarrow \mu(C+x)$  est log-concave  
 paire, donc atteint son max en  $x=0$
- Plus directement  $\mu(C) \stackrel{\text{et la symétrie de } \mu \text{ et } C}{=} \mu\left(\frac{C+x}{2} + \frac{C-x}{2}\right) \geq \sqrt{\mu(C+x)\mu(C-x)} = \mu(C)$   
 (cet  $\mu$  est paire)

# Exo 1.8

1) a) Comme  $g-f$  est continue sur  $[0, M]$  et  $\int_0^M (g-f) = 0$ , on en déduit que si  $g-f \neq 0$ , alors  $g-f$  change de signe au moins une fois sur  $]0, M[$ .

Ensuite, on remarque que  $g-f$  a le même signe que  $g^{1/k} - f^{1/k}$  (car  $g, f \geq 0$ ). Comme  $g^{1/k}$  est affine, on a que  $g^{1/k} - f^{1/k}$  est convexe sur  $[0, M]$ .

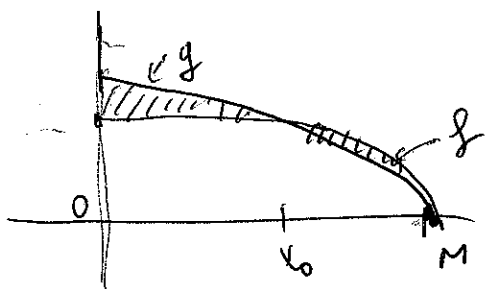
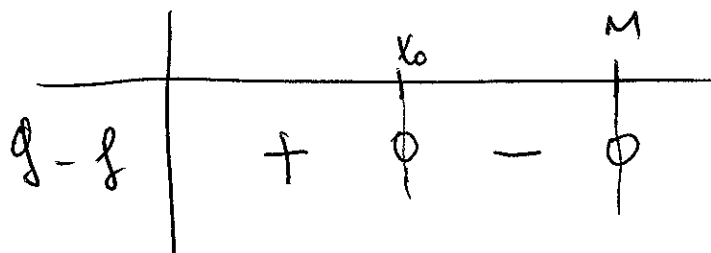
Soit  $x_0 \in ]0, M[$  un point où  $\underbrace{g^{1/k} - f^{1/k}}_{=: \alpha}$  change de signe.

Comme  $\alpha(x_0) = \alpha(M) = 0$ , on a par convexité de  $\alpha$  que  $\alpha(t) \leq 0 \quad \forall t \in [x_0, M]$ . Comme  $\alpha$  change de signe en  $x_0$ , ~~on a~~ on a  $\alpha'(x_0) \neq 0$  et  $\alpha'(x_0) < 0$  (si  $\alpha'(x_0) = 0$  alors par convexité  $x_0$  est un maximum local,  $\alpha'(x_0) < 0$  démontre de  $\alpha \leq 0$  à droite de  $x_0$ )

Par conséquent,  $\alpha(x) \geq (x-x_0)\alpha'(x_0) \geq 0$  pour  $x \in$

Ainsi,  $\alpha$  change de signe seulement en  $x_0$ .

On a :



Notons que  $\int_0^M (g-f) = 0$

$$\Rightarrow \int_0^{x_0} (g-f) = \int_{x_0}^M (f-g) \geq 0$$

b) On a:

$$\int_0^M (\frac{f}{g} - g)(t) t^2 dt = - \int_0^{x_0} \underbrace{(g-f)(t)}_{\geq 0} \underbrace{t^2}_{\leq x_0^2} dt + \int_{x_0}^M \underbrace{(f-g)(t)}_{\geq 0} \underbrace{t^2}_{\geq x_0} dt$$

$$\geq -x_0^2 \int_0^{x_0} (g-f) + x_0^2 \int_{x_0}^M (f-g) = 0$$

c) On a:

$$\frac{\int_0^M t^2 g(t) dt}{\int_0^M g(t) dt} \geq \frac{\int_0^M t^2 g(t) dt}{\int_0^M g(t) dt} = \frac{\int_0^M t^2 (M-t)^k dt}{\int_0^M (M-t)^k dt}$$

$$= \frac{\frac{1}{k+1} \frac{1}{k+2} \frac{1}{k+3} M^{k+3}}{\frac{1}{k+2} M^{k+2}}$$

$$= \frac{2}{(k+2)(k+3)} M^2$$

2) a) Soit  $k$  un corps convexe symétrique et  $\theta$  une direction ( $|\theta|=1$ ) la fonction réelle  $f_{k,\theta}$  est  $\frac{1}{n-1}$ -concave (  $f_{k,\theta}^{\frac{1}{n-2}}$  concave sur son support)

Le support de  $f_{k,\theta}$  est la projection de  $k$  dans la direction  $\theta$ :  
 (sur la droite  $\mathbb{R}\theta$ )

$$= P(k) \quad \text{où} \quad P(x) = (x \cdot \theta) \theta$$

$$= [-h_{k,\theta}, h_{k,\theta}] \theta \quad \text{où} \quad h_{k,\theta} = \sup_{x \in k} x \cdot \theta$$

On a donc, d'après le 1) que

$$h_{k,\theta}^2 \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2} \frac{\int_0^{h_{k,\theta}} t^2 f_{k,\theta}(t) dt}{\int_0^{h_{k,\theta}} f_{k,\theta}(t) dt}$$

$$\leq (n+1)^2$$

On par Fubini et paires:

$$\int_0^{h_{k,\theta}} t^2 f_{k,\theta}(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} t^2 f_{k,\theta}(t) dt = \frac{1}{2} \int (x \cdot \theta)^2 dx$$

et

$$\int_0^{h_{k,\theta}} f_{k,\theta} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f_{k,\theta} = \frac{1}{2} |k|^k$$

b)  $\sup_{|\theta|=1} h_{k,\theta} = R(k)$