Semi-groupe et inégalités gaussiennes

Exercices

***Exercice 6.1* (Une autre preuve de l'inégalité de log-Sobolev)**

On souhaite démontrer l'inégalité de log-Sobolev gaussienne sans utiliser l'ingrédient (central dans la preuve du cours) $|\nabla P_t| \leq e^{-t}|P_t \nabla f|$ *(il y a en fait égalité mais l'inégalité est suffisante dans la preuve).*

On désigne par L *le générateur d'Ornstein-Uhlenbeck sur* $\mathbb{R}^n$*.*

1. *Montrer que pour* f *régulière on a*
$$\frac{1}{2}L(|\nabla f|^2) - \nabla f \cdot \nabla(Lf) \geq |\nabla f|^2.$$
2. *Pour* f *donnée et* $t \geq 0$*, on pose* $\alpha(t) = \mathrm{Ent}_{\gamma_n}(P_t f)$*. Montrer que pour* $t > 0$ *fixé, si on pose* $F = \log P_t f$ *on a*
$$\alpha''(t) = 2\int \nabla F \cdot \nabla L(\log F)\, d\gamma_n - \int L(|\nabla \log F|^2) F\, d\gamma_n.$$
3. *En déduire que* $\alpha''(t) \leq -2\alpha'(t)$ *et conclure.*

***Exercice 6.2* (Encore une preuve de l'inégalité de log-Sobolev)**

Le but de cet exercice est de voir que l'inégalité de log-Sobolev gaussienne peut se déduire de l'inégalité de Prékopa-Leindler.

Soit, pour simplifier, f *une fonction régulière (*C^3 *suffit) à support compact.*

1. *Par une bonne application de l'inégalité de Prékopa-Leindler, montrer que si l'on pose, pour* $t \in [0, 1[$ *et* $z \in \mathbb{R}^n$*,*
$$f_t(z) := \sup_{z=(1-t)x+ty} \left[f(x) - \frac{t(1-t)}{2}|y-x|^2 \right],$$
alors
$$\int e^{f_t}\, d\gamma_n \geq \left(\int e^{\frac{1}{1-t} f}\, d\gamma_n \right)^{1-t}.$$
2. *Montrer que l'on a, lorsque* $t \to 0$*,*
$$f_t(z) = f(z) + t\,\frac{|\nabla f(z)|^2}{2} + O(t^2)$$
uniformément en z*.*
3. *Retrouver l'inégalité de log-Sobolev gaussienne.*

Exercice 6.3. — *Soit* μ *une probabilité log-concave sur* $\mathbb{R}^n$ *de densité* e^{-V} *avec* V *régulière telle que*
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{Hess}_x V \geq \lambda \mathrm{Id}$$
pour un certain $\lambda > 0$*.*

En adaptant les démonstrations des deux exercices précédents, montrer que μ *vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante* λ*.*

Exercice 6.4. — *Soit* I *la fonction isopérimétrique gaussienne.*

1. *Montrer que lorsque* $s \to 0$*,* $I(s) \sim s\sqrt{2\log\frac{1}{s}}$*.*
2. *En appliquant l'inégalité de de Ehrhard-Bobkov à la fonction* sf *pour* $s \to 0$*, retrouver l'inégalité de log-Sobolev gaussienne.*

Exercice 6.5. — *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. En appliquant l'inégalité isopérimétrique gaussienne esembliste dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *pour le epigraphe de* f*,* $A = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad t \leq f(x)\}$*, retrouver l'inégalité de Ehrhard- Bobkov.*