Décomposition de la sphère et cas des vecteurs compressibles

I/ Vecteurs sparse, compressibles et incompressibles

Soit $\delta, \rho \in]0,1[$ fixés (plus tard ils dépendront seulement de B)

Def : 1) Un vecteur $z \in \mathbb{R}^n$ est dit δ-sparse si au moins $(1-\delta)n$ de ses coordonnées sont nulles, i.e. :

$$|\mathrm{supp}(\cancel{z})| \leq \delta n$$

càd : $$\frac{1}{n} |\{ i \in [n],\ x_i \neq 0 \}| \leq \delta$$

On note $\mathrm{Sparse}(\delta)$ l'ensemble des vecteurs δ-sparse

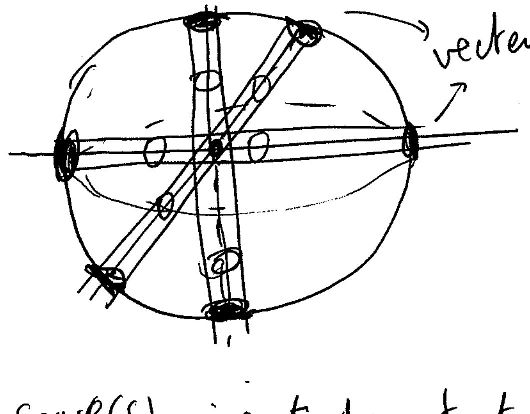
2) Un vecteur $x \in S^{n-1}$ de la sphère est dit (δ,ρ)-compressible s'il est à distance au plus ρ d'un vecteur δ-sparse

$$d(x, \mathrm{Sparse}(\delta)) \leq \rho$$

3) Un veteur $x \in S^{n-1}$ de la sphère est dit (δ,ρ)-incompressible s'il n'est pas (δ,ρ)-compressible.

On a : $$S^{n-1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ensemble des vecteurs} \\ (\delta,\rho)\text{-compressibles}}}{\mathrm{Comp}(\delta,\rho)} \dot\cup \mathrm{Icomp}(\delta,\rho)$$

$\delta = \frac{1}{3}$ dans $\mathbb{R}^3$



⚠ Les vecteurs $\mathrm{Sparse}(\delta)$ vivent dans tout $\mathbb{R}^n$

Notations pour la suite (Projection coordonnées)

Soit $I \subset [n]$ un ensemble de coordonnées

$$I = \{i_1, \dots, i_k\} \quad \text{avec } 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$$

On note P_I la projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^k$ suivant les I-coordonnées :

$$P_I(x) = P_I(x_1, \dots, x_n) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$$

On pourra aussi identifier $P_I(x)$ au vecteur $(0, \dots, 0, x_{i_1}, 0, \dots, \dots x_{i_k}, 0, \dots)$ de $\mathbb{R}^n$

Le lemme suivant sera utile dans l'étude du cas incompressible

Lemme B (les vecteurs incompressibles sont quasi-uniformes)

Il existe $c_1 \in]0,1[$ et $c_2, c_3 > 0$ dépendant de δ et ρ, tel que pour tout $x \in Incomp(\delta, \rho)$, $\exists\, \sigma(x) \subset [n]$ tel que $|\sigma(x)| \ge c_1 n$ et

$$\forall i \in \sigma(x) : \quad \frac{c_2}{\sqrt{n}} \le |x_i| \le \frac{c_3}{\sqrt{n}}$$

Démo Soit $\sigma_1 := \{i \in [n] \,;\, |x_i| \le \frac{1}{\sqrt{\delta n}}\}$ $\qquad \sigma_1^c = \{i \in [n] \,;\, i \notin \sigma_1\}$

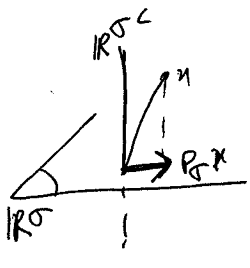
et $\sigma_2 := \{i \in [n] \,;\, |x_i| \ge \frac{\rho}{\sqrt{2n}}\}$

- $|P_{\sigma_2^c}(x)|^2 = \sum_{i \notin \sigma_2} |x_i|^2 < \frac{\rho^2}{2n} |\sigma_2^c| \le \frac{\rho^2}{2}$

- On a $|\sigma_1^c| \le \delta n$, En effet $1 = \sum x_i^2 \ge \sum_{i \in \sigma_1^c} x_i^2 \ge \frac{|\sigma_1^c|}{\delta n}$

Par ailleurs, $\forall \sigma \subset [n]$ on a :

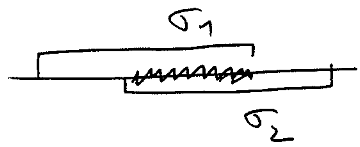
$$|P_\sigma x| \ge d(x, \mathbb{R}^{\sigma^c})$$



Donc, comme x est Incomp(δ, ρ) on a $d(x, \mathbb{R}^{\sigma_1^c}) > \rho$ et

$$|P_{\sigma_1} x|^2 > \rho^2$$

Prenons $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2 \subset [n]$



On a : $$|P_\sigma(x)|^2 = \sum_{k \in \sigma} x_k^2 \leq |\sigma| \frac{1}{\delta n}$$

Par ailleurs
$$|P_\sigma(x)|^2 = \underbrace{|P_{\sigma_1}(x)|^2}_{\geq \rho^2} - \underbrace{|P_{\sigma_1 \setminus \sigma_2}(x)|^2}_{\leq |P_{\sigma_2^c}(x)|^2 \leq \frac{\rho^2}{2}}$$

Donc
$$|P_\sigma(x)| \geq \frac{\rho^2}{2}$$

et donc $$|\sigma| \geq \frac{\rho^2 \delta}{2} n$$

on choisit $\sigma(x) = \sigma$, $c_1 = \frac{\rho^2 \delta}{2}$
$c_2 = \frac{\rho}{\sqrt{2}}$ $c_3 = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$

$\blacksquare$

II/ Etude du "cas compressible"

Rappel : $$s_n(A) = \inf_{x \in S^{n-1}} |Ax|$$

Donc
$$\mathbb{P}\left(s_n(A) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \leq \mathbb{P}\left(\inf_{x \in Comp(\delta, \rho)} |Ax| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)$$
$$+ \mathbb{P}\left(\inf_{x \in InComp(\delta, \rho)} |Ax| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)$$

à partir de maintenant, on va traiter séparément ces deux cas. Le cas "facile" est celui des vecteurs compressibles.

théo B

Soit $K \geq 0$. Il existe $\delta, \rho, c_3, c_4, c'_4 > 0$ dépendant de K et B tel que pour toute matrice A $N \times n$ à entrées indep $H_2(B)$ on a :

$$\mathbb{P}\left(\inf_{x \in \mathrm{Comp}(\delta,\rho)} |Ax| \leq c_3\sqrt{N} \text{ et } \|A\| \leq K\sqrt{N} \right) \leq e^{-c_4 N}$$

En particulier si A est une matrice $N \times n$ à entrées indep $H_1(B)$:

$$\mathbb{P}\left(\inf_{x \in \mathrm{Comp}(\delta,\rho)} |Ax| \leq c_3\sqrt{N} \right) \leq e^{-c'_4 N}$$

On a donc encore, dans le cas, un résultat très fort :

" $\inf_{x \in \mathrm{Comp}} |Ax| \geq c\sqrt{N}$ en grande proba "

Demo : L'idée est de se ramener au cas strictement rectangulaire.

Soit δ_0, c_1, c_2 provenant du théo A.

On choisit $\delta \leq \delta_0$. On va déterminer $\rho > 0$. (δ sera fixé à la fin)

Soit $x \in \mathrm{Comp}(\delta, \rho)$. $\exists y \in \mathrm{Sparse}(\delta)$, $|x-y| \leq \rho$

→ Si ~~de plus~~ $|Ax| \leq \frac{c_1}{4}\sqrt{N}$ et $\|A\| \leq K\sqrt{N}$

alors
$$|Ay| \leq \rho K\sqrt{N} + \frac{c_1}{4}\sqrt{N}$$
$$\leq \frac{c_1}{2}\sqrt{N} \text{ en choisissant } \rho := \min\left(\frac{1}{2}, \frac{c_1}{4K}\right) \in]0, \tfrac{1}{2}]$$

Par ailleurs : $|x-y| \leq \rho \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |y| \geq \frac{1}{2}$

et $\left| A\frac{y}{|y|} \right| \leq c_1\sqrt{N}$

Notez que $\frac{y}{|y|} \in \mathrm{Sparse}(\delta)$ ← cône.

On a donc montré :

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{x\in Comp(\delta,\rho)} |Ax| \le \frac{c_1}{4}\sqrt{N} \text{ et } \|A\| \le K\sqrt{N}\Big)$$

$$\le \mathbb{P}\Big(\inf_{\substack{y\in Sparse(\delta)\\ y\in S^{n-1}}} |Ay| \le c_1\sqrt{N} \text{ et } \|A\| \le K\sqrt{N}\Big)$$

Soit $y \in Sparse(\delta)$, et $\sigma_y = \{ i\in[n] \,;\, y_i \neq 0\}$. Par hyp $|\sigma_y| \le \delta n$
~~ainsi~~ ainsi, y s'identifie à un élément de $\mathbb{R}^k$

Pour $\sigma \subset [n]$, notons A_σ la ~~sous~~-matrice de A obtenue en gardant seulement les colonnes dans σ.

A_σ matrice $N \times |\sigma|$

On a donc, en notant $k = \delta n$

$$\inf_{y\in Sparse(\delta)\cap S^{n-1}} |Ay| = \inf_{|\sigma|=k} \inf_{y\in S^{k-1}} |A_\sigma y|$$

Si $A = [X_1, \dots, X_n]$
$A_\sigma = [X_{i_1}, \dots, X_{i_k}]$
si $\sigma = \{i_1, \dots, i_k\}$

et donc

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{y\in Sparse(\delta)\cap S^{n-1}} |Ay| \le c_1\sqrt{N} \text{ et } \|A\| \le K\sqrt{N}\Big)$$

$$\le \sum_{\sigma, |\sigma|=k} \mathbb{P}\Big(\inf_{y\in S^{k-1}} |A_\sigma y| \le c_1\sqrt{N} \text{ et } \|A\| \le K\sqrt{N}\Big)$$

Propo A pour A $k\times N$ avec $k = \delta n \le \delta_0 N$ | car $\delta \le \delta_0$, $n \le N$

$$\le \binom{n}{k} e^{-c_2 N}$$

$$\le \Big(\frac{c}{\delta}\Big)^{\delta n} e^{-c_2 N}$$

$$\le e^{-(-\delta \log(\frac{c}{\delta}) + c_2) N} \quad n \le N$$

on choisit $\delta \le \delta_0$ de sorte que $\delta \log\big(\frac{c}{\delta}\big) \le \frac{c_2}{2}$

on a alors :

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{x\in Comp(\delta,\rho)} |Ax| \le \frac{c_1}{4}\sqrt{N} \text{ et } \|A\| \le K\sqrt{N}\Big) \le e^{-\frac{c_2}{2} N}$$