Cas des vecteurs incompressibles et inversion des matrices carrées

I/ Inversibilité des vecteurs incompressibles, distance et mesure de petites boules.

Soit A une matrice carrée $n \times n$ $\quad$ (cas $N = n$)

On note
$$A = [X_1, \text{—}, X_n]$$
vecteurs colonnes $\in \mathbb{R}^n$

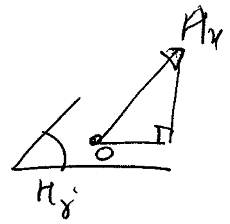
Pour $j \in n$, $\quad H_j := \mathrm{Vect}\left(X_i \; ; \; \substack{i \in [n] \\ i \neq j} \right)$

Supposons que A soit une matrice aléatoire à entrées indep

Alors : $\quad$ X_j et H_j sont indépendants

Soit $x \in S^{n-1}$, alors $\quad Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i$

Pour $j \in [n]$:



$$\begin{aligned} |Ax| &\geq d(Ax, H_j) \\ &= d(x_j X_j, H_j) \\ &= |x_j| \, d(X_j, H_j) \end{aligned}$$

!!

On a donc (idée essentielle)

Fait : Pour $j \in [n]$, $\quad |Ax| \geq |x_j| \, d(X_j, H_j)$

càd $\quad |Ax| \geq \max_{j \in [n]} \left(|x_j| \, d(X_j, H_j) \right)$

Notez que les v.a. $d(X_j, H_j)$ sont <u>identiquement distribuées</u>(*) pour les $\neq j$, mais elles ne sont pas indépendantes.

(*) Si les entrées de la matrices sont identiquement distribuées

On veut minorer $|x_j|$ et $d(X_j, H_j)$

Pour $\leftarrow$: OK si x est incompressible.

Voici la dé pour toute la suite :

Lemme C : Soit $\delta, \rho \in]0,1[$. ~~Il~~ Existe $c_1, c_2 > 0$ (dépendant de δ, ρ) tel que pour toute matrice A aléatoire $n \times n$ à <u>entrées indep. identiquement distribuées</u> (iid) on a :

$$\mathbb{P}\left(\inf_{x \in Incomp(\delta,\rho)} |Ax| < \frac{\varepsilon c_2}{\sqrt{n}} \right) \leq \frac{1}{c_1} \mathbb{P}\left(d(X_1, H_1) < \varepsilon \right)$$

Rq : Ce lemme donne bien mieux qu'une simple estimation du type $\mathbb{P}(\bigcup \cdots) \leq \sum \mathbb{P}(\cdots)$

Démo : D'après le <u>lemme B</u> $\exists\, c_1, c_2, c_3$ dépendant de δ, ρ tel que $\forall x \in Incomp(\delta,\rho)$:

$\exists\, \sigma(x) \subset [n]$ avec $|\sigma(x)| \geq c_1 n$ et

$\forall i \in \sigma(x) \qquad \frac{c_2}{\sqrt{n}} \leq |x_i| \leq \frac{c_3}{\sqrt{n}}$

Notons, pour $j \in [n]$ $\qquad p = \mathbb{P}(d(X_j, H_j) < \varepsilon)$ $\leftarrow$ indep de j.

Rappel : les $d(X_j, H_j)$ <u>ne sont pas indep</u>

<u>mais</u> on a toujours :

$$\mathbb{E}\, |\{ j \in [n] \,;\, d(X_j, H_j) < \varepsilon \}| = \mathbb{E} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{d(X_j, H_j) < \varepsilon\}}$$

$$= np$$

Notons $\sigma_1 := \{ j \in [n] \,;\, d(X_j, H_j) \geq \varepsilon \} \subset [n]$

On considère l'évènement $U \subset \Omega$: $|\sigma_1| \geqslant (1-c_1)n$

où dans la suite c_1, c_2 sont les constantes provenant du lemme B rappelé ci-dessus.

On a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(U^c) &= \mathbb{P}(|\sigma_1| \leq (1-c_1)n) \\
&= \mathbb{P}(|\sigma_1^c| \geqslant c_1 n) \\
&\overset{\substack{\text{markov} \\ \downarrow}}{\leqslant} \frac{\mathbb{E}|\sigma_1^c|}{c_1 n} = \frac{np}{c_1 n}
\end{aligned}
$$

Donc $\underline{\mathbb{P}(U^c) \leq \frac{p}{c_1}}$

Si on est dans U, alors pour $x \in Incomp(\delta, \rho)$ qcq, soit $\sigma(x)$ provenant du lemme B

On a : $|\sigma_1| + |\sigma(x)| > (1-c_1)n + c_1 n = n$

Donc $\sigma_1 \cap \sigma(x) \neq \emptyset$

Soit $k \in \sigma_1 \cap \sigma(x)$:

$$
\begin{aligned}
|Ax| &\geqslant |x_k| \, d(X_k, H_k) \\
&\geqslant \frac{c_2}{\sqrt{n}} d(X_k, H_k) \\
&\geqslant \frac{c_2}{\sqrt{n}} \varepsilon
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\mathbb{P}\left(\inf_{x \in Incomp(\delta,\rho)} |Ax| < \frac{c_2}{\sqrt{n}} \varepsilon \right) \leq \mathbb{P}(U^c) \leq \frac{p}{c_1}
$$

$\blacksquare$

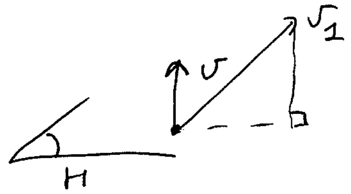
<u>Remarque</u> : On a clairement pas besoin de identiq. distribuée (Très joli !)

le résultat général, pour A à entrée indep, est ~~s~~simplement :

$$
\mathbb{P}\left(\inf_{x \in Incomp(\delta,\rho)} |Ax| < \frac{\varepsilon c_2}{\sqrt{n}} \right) \leq \frac{1}{c_1} \times \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(d(X_j, H_j) \leq \varepsilon)
$$

Nouvelle question : Comment estimer $d(X_1, H_1)$?

→ Soit $H_1 = \text{Vect}(v_2, \dots, v_n)$ $v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$
et soit $v \perp H$ avec $|v| = 1$
Alors, pour $v_1 \in \mathbb{R}^n$, on a :



$$d(v_1, H_1) \geq |v_1 \cdot v|$$

égalité si H hyperplan, càd $H = v^\perp$

→ Choix d'un vecteur orthogonal

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{(n-1) \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{tel que, } \forall v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f \text{ } \underline{\text{borélienne}} \\ f(v_2, \dots, v_n) \perp \text{vect}(v_2, \dots, v_n) \text{ et } |f(v_2, \dots, v_n)| = 1 \end{array} \right.$$

<u>Algo</u> : on commence par construire $u \in \mathbb{Q}^n$ avec $u \notin \text{Vect}(v_2, \dots, v_n)$
puis on pose $f(v_2, \dots, v_n) = \dfrac{u - P_H u}{|u - P_H u|}$

→ Soit A matrice aléatoire $n \times n$, $A = [X_1, \dots, X_n]$

$H_1 := \text{Vect}(X_2, \dots, X_n)$ <u>indep</u> de X_1

On pose $X_1^* := f(X_2, \dots, X_n)$

On a : $\left\{ \begin{array}{l} X_1^* \text{ indépendant de } X_1 \\ X_1^* \in S^{n-1} \text{ et } X_1^* \perp H_1 \\ d(X_1, H_1) \geq |X_1^* \cdot X_1| \end{array} \right.$

En particulier, $\forall \varepsilon \geq 0$

$$\boxed{\mathbb{P}(d(X_1, H_1) \leq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_1^* \cdot X_1| \leq \varepsilon)}$$

Ecrivons : $X_1^* = (a_1, \dots, a_n)$ $\quad X_1 = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ← indépendantes

On doit estimer

$$\mathbb{P}\left(\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i \right| \leq t \right)$$

→ Problème de petites boules : est-ce petit si t est petit ??

Exemple : Supposons que $\xi_1, \dots, \xi_n$ soit des Bernoulli ± 1 indep

Prenons carrément $t = 0$

$P_0(a) = \mathbb{P}\left(\sum a_i \xi_i = 0 \right) \leq ?$

→ cela dépend fortement des coeff a_i

Si $(a_1, \dots, a_n) = (1, 0, \dots, 0)$

alors $P_0(a) = \mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \frac{1}{2}$ très mauvais !

Si $(a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

alors $P_0(a) = \mathbb{P}\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\sqrt{n}} = 0 \right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ mieux !

en fait $\mathbb{P}\left(\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i \right| \leq t \right)$ sera d'autant plus petit

que de nombreuses coordonnées ne seront pas petites

→ ie : si $a = (a_1, \dots, a_n)$ est incompressible

heureusement pour nous, X_1^* va être incompressible en grande proba.

II/ Estimation de la probabilité de petites boules via le théo. central limite et propriétés du vecteur normal

On va utiliser la version quantitative suivante du théorème de la limite centrale (résultat admis)

Théo (théorème de Berry-Esséen)

Soit $\xi_1, \dots, \xi_n$ des variables aléatoires indép. centrées ayant un moment d'ordre 3, et soit $\sigma^2 := \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\xi_k^2$. Soit g une v.a. gaussienne standard. Alors, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\left| \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^n \xi_k \leq t \right) - \mathbb{P}(g \leq t) \right| \leq \frac{C}{\sigma^3} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|\xi_k|^3$$

où C est une constante numérique

Exemple d'application : $\xi_1, \dots, \xi_n$ centrés de variance 1 et $\mathbb{E}\xi_i^3 \leq B$ fixé
Alors $\sigma = \sqrt{n}$ et on obtient

$$\left| \mathbb{P}\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\sqrt{n}} \leq t \right) - \mathbb{P}(g \leq t) \right| \leq \frac{CB}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

→ Supposons que $\xi_1, \dots, \xi_n$ vérifient $H_2(B)$

Alors $(\mathbb{E}\xi_i^3)^{1/3} \leq (\mathbb{E}\xi_i^4)^{1/4} \leq 2B$

Donc $\mathbb{E}\xi_i^3 \leq (2B)^3$

~~Le résultat précédent appliqué à $a_i\xi_i$, où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$~~

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in S^{n-1}$ $\quad (\sum a_i^2 = 1)$

On applique le théo aux variables $a_1\xi_1, \dots, a_n\xi_n$

On a : $\sigma^2 = \sum a_i^2 = 1$ et $\mathbb{E}|a_i\xi_i|^3 \leq |a_i|^3 (2B)^3$

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\left| \mathbb{P}\left(\sum a_i\xi_i \leq t \right) - \mathbb{P}(g \leq t) \right| \leq C \times (2B)^3 \sum_{i=1}^n |a_i|^3$$

Par ailleurs, on a la même estimation pour $\mathbb{P}(\sum a_i \xi_i \geq s)$ ---
Soit encore, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\left| \mathbb{P}\left(\left| \sum a_i \xi_i - \alpha \right| \leq \varepsilon \right) - \mathbb{P}\left(|g-\alpha| \leq \varepsilon \right) \right| \leq 2 \times C \times (2B)^3 \sum_{i=1}^{n} |a_i|^3$$

Il est facile d'estimer $\mathbb{P}(|g-\alpha| \leq \varepsilon)$ car g a une densité bornée :

$$\mathbb{P}(|g-\alpha| \leq \varepsilon) = \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} e^{-s^2/2} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \varepsilon$$

On a donc montré

<u>Lemme D</u>

Il existe $c_5 > 0$ dépendant de B tel que, pour des v.a. $\xi_1, \dots, \xi_n$ indép et $H_2(B)$, et pour $a \in S^{n-1}$ on a, $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i - \alpha \right| \leq \varepsilon \right) \leq c\,\varepsilon + c_5 \sum_{i=1}^{n} |a_i|^3$$

c est une constante numérique. $(= \sqrt{\frac{2}{\pi}})$

Plus loin on aura seulement besoin de $\mathbb{P}(|\sum a_i \xi_i| \leq \varepsilon)$, ie de $\alpha = 0$, mais on verra que pour cela on devra utiliser ce résultat $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Pour certaines v.a. on montre que

$$\mathbb{P}\left(\left| \sum a_i \xi_i \right| \leq \varepsilon \right) \leq c\,\varepsilon$$

et dans ce cas on peut passer directement au paragraphe suivant.

Mais cela ne peut pas être vrai en g<u>al</u> : pensez aux Bernoulli.

Justement, on retrouve la discussion sur les coordonnées :

Si $\sum a_i^2 = 1$, alors $\sum a_i^3$ sera d'autant plus petit qu'il n'y aura pas de "grandes coordonnées" $\rightarrow$ c'est le cas des vecteurs <u>incompressibles</u>

On va voir qu'avec le Lemme D

$\rightarrow$ on peut avoir une bonne estimation lorsque a est incompressible

$\rightarrow$ que le vecteur orthogonal X_1^* est incompressible en grande proba.

Lemme E

Soit $\delta, \rho \in]0,1[$. Il existe $C_{\delta,\rho}$ dépendant de δ, ρ et B tel que, si $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont des v.a. indép $H_2(B)$, alors pour $a \in \mathrm{Incomp}(\delta,\rho)$ et $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n a_i \xi_i\right| \leq \varepsilon \right) \leq C\varepsilon + \frac{C}{\sqrt{n}}$$

Démo : D'après le lemme B, $\exists\, c_1, c_2, c_3 > 0$ dépendant de B et $\sigma(a) \subset [n]$ tel que $|\sigma(a)| \geq c_1 n$ et

$$\forall i \in \sigma(a) : \quad \frac{c_2}{\sqrt{n}} \leq |a_i| \leq \frac{c_3}{\sqrt{n}}$$

On pose, pour $v \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$

$$P_\varepsilon(v) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n v_i \xi_i - \alpha\right| \leq \varepsilon \right)$$

fonction de Levy (de petites boules)

Fait : $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall \sigma \subset [n]$

$$P_\varepsilon(v) \leq P_\varepsilon(P_\sigma v)$$

Démo : ~~on a~~ WLOG $\sigma = \{1, \dots, k\}$
on conditionne par rapport à $\xi_{k+1}, \dots, \xi_n$

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum v_i \xi_i - \alpha\right| \leq \varepsilon \right) = \mathbb{E}_{\xi_{k+1} \dots \xi_n} \underbrace{\mathbb{P}_{\xi_1 \dots \xi_k}\Big(\Big|\sum_{i=1}^k v_i \xi_i + \overbrace{\sum_{j=k+1}^n v_j \xi_j - \alpha}^{\text{nouvel } \alpha}\Big| \leq \varepsilon \Big)}_{\leq P_\varepsilon(v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0)}$$

$$\leq P \quad \text{ok}$$

le lemme D se réécrit ~~comme~~ ($\varepsilon \to \frac{\varepsilon}{|v|}$ $\quad \alpha \to \frac{\alpha}{|v|}$ $\quad a_i = \frac{v_i}{|v|}$

$\forall v \in \mathbb{R}^n \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$P_\varepsilon(v) = \sup_\alpha \left(\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n v_i \xi_i - \alpha\right| \leq \varepsilon \right) \right) \leq C \frac{\varepsilon}{|v|} + C_5 \frac{\sum |v_i|^3}{|v|^3}$$

D'après le fait on a, pour notre a et $\sigma := \sigma(a)$

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i\right| \leq \varepsilon\right) \leq P_\varepsilon(P_\sigma a)$$

$$\leq C \frac{\varepsilon}{|P_\sigma(a)|} + C_5 \frac{\sum_{i\in\sigma} |a_i|^3}{|P_\sigma(a)|^3}$$

on a : $|P_\sigma(a)|^2 = \sum_{i\in\sigma} |a_i|^2 \geq C_1 n \times \frac{C_2^2}{n} = C_1 C_2^2$ et $\sum_{i\in\sigma} |a_i|^3 \leq n \times \frac{C_3^3}{n^{3/2}}$

Donc $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i\right| \leq \varepsilon\right) \leq \frac{C}{\sqrt{C_1 C_2^2}} \varepsilon + \frac{C_5}{(C_1 C_2^2)^{3/2}} \times \frac{C_3^3}{\sqrt{n}}$ ∎

enfin, afin d'utiliser le lemme E, nous avons besoin de savoir que X_1^* est incompressible (en grande proba)

Lemme F

Soit $K \geq 1$. Soit $\delta_0, \rho_0, c_4 > 0$ donnés par le théo. B (dépendant de K et B). Pour toute matrice aléatoire A $n \times n$ à entrées indep $H_2(B)$ on a

$$\mathbb{P}\left(X_1^* \in Comp(\delta_0, \rho_0) \text{ et } \|A\| \leq K\sqrt{n}\right) \leq e^{-c_4 n}$$

Démo. On écrit $A = [X_1, \ldots, X_n]$ et $A' = \begin{bmatrix} X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = ({}^tA)_{\{2,\ldots,n\}}$

On a par définition de X_1^* que $\quad A'\ (n-1) \times n$

$$A' X_1^* = 0 \qquad (X_1^* \perp vect(X_2, \ldots, X_n)$$

ie $X_1^* \cdot X_i = 0 \quad \forall i = 2, \ldots, n$

On a donc $X_1^* \in Comp(\delta, \rho) \Rightarrow \inf_{x \in Comp(\delta,\rho)} |A'x| = 0$

On applique le théo B avec la matrice aléatoire A' $(n-1) \times n$ à entrées indep $H_2(B)$ $\left[\begin{matrix} n \to n-1 \\ N \to n \end{matrix}\right]$

~~Donc~~ on a donc, avec les constantes provenant de ce theo.

$$\mathbb{P}(X_1^* \in Comp(\delta,\rho) \text{ et } \|A\| \leq K\sqrt{n})$$

$$\leq \mathbb{P}(\inf_{x\in Comp(\delta,\rho)} |A'x| = 0 \text{ et } \|A\|_{\ell_2\to\ell_2} \leq K\sqrt{n})$$

$$\leq \mathbb{P}(\inf_{x\in Comp(\delta,\rho)} |A'x| \leq c_3\sqrt{n} \text{ et } \|A'\|_{\ell_2\to\ell_2} \leq K\sqrt{n})$$

$$\leq e^{-c_4 n}$$

car $\|A'\|_{\ell_2^n\to\ell_2^{n-1}} = \|{}^tA'\|_{\ell_2^{n-1}\to\ell_2^n} \leq \|A\|_{\ell_2^n\to\ell_2^n}$ ■

III / Inversibilité des vecteurs incompressibles et résultat général pour les matrices carrées

Les résultats de la partie précédente donnent

Lemme G

Soit $K>0$. Il existe $C_8>0$ dépendant seulement de K et B tel que, pour toute matrice aléatoire $n\times n$ à entrées indep $H_2(B)$ on a, $\forall \varepsilon>0$

$$\mathbb{P}(d(X_1,H_1) < \varepsilon \text{ et } \|A\| \leq K\sqrt{n}) \leq C_8\left(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Démo : Soit $\delta_0, \rho_0 \in]0,1[$, $c_4>0$ provenant du lemme F.

$$\mathbb{P}(d(X_1,H_1)<\varepsilon \text{ et } \|A\|\leq K\sqrt{n}) \leq \mathbb{P}(|X_1^*\cdot X_1| < \varepsilon \text{ et } \|A\|\leq K\sqrt{n})$$

$$\leq \mathbb{P}(|X_1^*\cdot X_1| < \varepsilon \text{ et } X_1^* \in Incomp(\delta_0,\rho_0)) + \mathbb{P}(X_1^* \in Comp(\delta_0,\rho_0) \text{ et } \|A\| \leq K\sqrt{n})$$

$$\leq \mathbb{P}(|X_1^*\cdot X_1| < \varepsilon \text{ et } X_1^* \in Incomp(\delta_0,\rho_0)) + e^{-c_4 n}$$

On rappelle que X_1^* ne dépend que de $X_2, \text{—}, X_n$ et qu'il est indépendant de X_1.

On a donc, en conditionnant par $X_2 — X_n$

$$\mathbb{P}\left(|X_1^* \cdot X_1| < \varepsilon \text{ et } X_1^* \in \mathrm{Incomp}(\delta_0, \rho_0) \right)$$

$$\leq \mathbb{E}_{X_2 - X_n} \mathbb{P}\left(|X_1 \cdot X_1^*| \leq \varepsilon \text{ et } X_1^* \in \mathrm{Incomp}(\delta_0, \rho_0) \right)$$

↓ Lemme E

$$\leq \mathbb{E}_{X_2 \cdots X_n} \left[C_6 \varepsilon + \frac{C_7}{\sqrt{n}} \right]$$

$$= C_6 \varepsilon + \frac{C_7}{\sqrt{n}}$$

C_6, C_7 dépendant de δ_0, ρ_0 et B et donc C_6, C_7 — seulement de B.

Finalement

$$\mathbb{P}\left(d(X_1, H_1) < \varepsilon \text{ et } \|A\| \leq K\sqrt{n} \right)$$

$$\leq C_6 \varepsilon + \frac{C_7}{\sqrt{n}} + e^{-C_4 n}$$

↑ terme tué par $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\leq \frac{d_4}{\sqrt{C_4}\sqrt{n}}$$

$$\leq C_8 \left(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

C_8 dépendant de K et B.

■

On peut énoncer le résultat pour les vecteurs incompressibles

Prop C

Soit $K > 0$ et $\delta, \rho \in]0,1[$ donnés. Alors il existe C_2 dépendant de δ, ρ et C_8 dépendant de K et B tel que, pour toute matrice aléatoire A $n \times n$ à entrées $H_2(B)$ on a, $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\inf_{x \in \mathrm{Incomp}(\delta,\rho)} |Ax| \leq \frac{C_2 \varepsilon}{\sqrt{n}} \right) \leq \frac{C_8}{C_1} \left(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \mathbb{P}\left(\|A\| \geq K\sqrt{n} \right)$$

Démo : Soit c_1, c_2 provenant du lemme C. On a alors

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{x\in \mathrm{Incomp}(\delta,\rho)} |Ax| \leq \frac{c_2\varepsilon}{\sqrt{n}}\Big) \leq \frac{1}{c_1}\mathbb{P}\big(d(X_1,H_1) < \varepsilon\big) \ (*)$$

$$\leq \frac{1}{c_1}\mathbb{P}\big(d(X_1,H_1)<\varepsilon \text{ et } \|A\|\leq K\sqrt{n}\big) + \frac{1}{c_1}\mathbb{P}(\|A\|>K\sqrt{n})$$

$$\leq \frac{c_8}{c_1}\mathbb{P}\Big(\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) + \frac{1}{c_1}\mathbb{P}(\|A\|>K\sqrt{n})$$

∎

(*) Utiliser + tôt : $\mathbb{P}(\quad) \leq \frac{1}{c_1}\times\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(d(X_j,H_j<\varepsilon) \leq \dots$

En mettant les resultat ensemble on a :

Theo C

Il existe des constantes $c, C>0$ dépendant de B tel que, pour toute matrice aléatoire A $n\times n$ à entrés indep $\underline{H_1(B)}$ on a, $\forall \varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}\Big(s_n(A)\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\Big)\leq C\Big(\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

Démo : Soit δ_0, ρ_0 donnés par le théo B (ici $K = C_0$ dépend de B) de la Prop A

On a alors, avec les constantes du theo B $c_3, c_4>0$ (dépendant de B)

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{x\in \mathrm{Comp}(\delta_0,\rho_0)}|Ax|\leq c_3\sqrt{n}\Big)\leq e^{-c_4 n}$$

La Prop C ci-dessus appliquée avec $\delta_0,\rho_0>0$ et $K=C_0$ donne

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{x\in \mathrm{Incomp}(\delta_0,\rho_0)}|Ax|\leq \frac{c_2\,\varepsilon}{\sqrt{n}}\Big)\leq \overset{c_8/c_1}{\tilde{C}}\Big(\frac{\varepsilon}{c_2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)+\underbrace{\mathbb{P}(\|A\|>C_0\sqrt{n})}_{\leq e^{-c_0 n}}$$

$$\leq \tilde{C}\Big(\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

Dans le theo C, quitte à augmenter C, on peut supposer que $n\geq\frac{1}{c_2}$ et ~~...~~ $\varepsilon<1$

ainsi on a :

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{x \in \mathrm{Comp}(\delta_0,\rho_0)} |Ax| \leq c_3 \sqrt{n} \Big) \geq \mathbb{P}\Big(\inf_{x \in \mathrm{Comp}(\delta_0,\rho_0)} |Ax| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Big)$$

Enfin

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(s_n(A) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Big) &\leq \mathbb{P}\Big(\inf_{x \in \mathrm{Comp}(\delta_0,\rho_0)} |Ax| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Big) + \mathbb{P}\Big(\inf_{x \in \mathrm{Incomp}(\delta_0,\rho_0)} |Ax| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Big) \\ &\leq e^{-c_4 n} + \tilde{C} \Big(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{n}} \Big) \\ &\leq C \Big(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{n}} \Big) \end{aligned}$$

$\blacksquare$