Inégalités sur le cube discret $\{-1,1\}^n$

I/ Généralités

On note $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$, $n \geq 1$

et σ_n la mesure (de probabilité) uniforme :

pour $x \in \Omega_n$, $\sigma_n(\{x\}) = \frac{1}{2^n}$

pour $A \subset \Omega_n$: $\sigma_n(A) = \frac{|A|}{2^n}$

pour $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$: $\int f \, d\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \Omega_n} f(x)$

Propriété essentielle : σ_n est une mesure produit

$$\sigma_n = \sigma^{\otimes n}$$

où $\sigma(\{1\}) = \sigma(\{-1\}) = \frac{1}{2}$

Interprétation probabiliste

Soit ε une variable de Bernoulli ± 1 (définie sur un certain $(\Omega, \mathbb{P})$) :

$$\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$$

Si $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont n copies indépendantes de ε, alors le n-uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ a pour loi σ_n.

Remarque : Autres mesures produits

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$ $(p + q = 1)$

On considère la mesure μ_p^n définie sur Ω_n par :

pour $x \in \Omega_n$: $\mu_p^n(\{x\}) = p^{|\{i;\, x_i = 1\}|} \, q^{|\{i;\, x_i = -1\}|}$

$$= \prod_{i=1}^n p^{\frac{1+x_i}{2}} \, q^{\frac{1-x_i}{2}}$$

Alors μ_p^n est une proba produit : $\mu_p^n = \mu_p^{\otimes n}$ où

μ_p est la proba sur $\{-1, 1\}$ donnée par $\mu_p = p\,\delta_1 + q\,\delta_{-1}$.

On rappelle que la distance de Hamming est définie sur Ω_n par (distance produit l_1)

$$d(x,y) = |\{i \leq n \,;\, x_i \neq y_i\}| = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{x_i \neq y_i}$$

Pour $i \leq n$, on notera τ_i le "flip" (renversement) de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée. Pour $x \in \Omega_n$

$$\tau_i(x) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

On a donc, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$d(x,y) = k \iff \exists\, i_1, \ldots, i_k \text{ } k \text{ elts distincts de } \{1, \ldots, n\} \text{ tq } y = \tau_{i_k} \circ \cdots \circ \tau_{i_1}(x)$$

On introduit une notion de <u>voisins</u> sur Ω_n (ce qui revient à mettre une structure de graphe sur Ω_n) :

pour $x, y \in \Omega_n$, on convient que

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x \text{ et } y \text{ diffèrent exactement d'une coordonnée}$$

càd :

$$x \sim y \iff d(x,y) = 1 \iff \exists\, i \leq n,\ y = \tau_i(x)$$

On introduit la notion de <u>gradient discret</u>

<u>Def</u> : Pour $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x \in \Omega_n$ on pose

$$|\nabla f|^2_{(x)} := \frac{1}{2} \sum_{y \sim x} [f(x) - f(y)]^2$$

et plus généralement pour $f, g : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\nabla f \cdot \nabla g)_{(x)} := \frac{1}{2} \sum_{y \sim x} [f(x) - f(y)] \cdot [g(x) - g(y)]$$

⚠ $|\nabla f|^2_{(x)}$ est une <u>notation</u> commode, rien de plus...

On peut voir ce gradient comme un gradient produit ℓ_2

Pour $n=1$: si $f:\{-1,1\}\longrightarrow\mathbb{R}$ on a

$$|Df|^2(1) = |Df|^2(-1) = \frac{1}{2}\left(f(1)-f(-1)\right)^2$$

et $\int |Df|^2 d\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(f(1)-f(-1)\right)^2$

Pour $n \geq 2$:

<u>rappel notations</u> pour $x\in\Omega_n$ et $i\leq n$, on note

$$\hat{x}_i = (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)\in\Omega_{n-1}$$

On note f_i, pour $f:\Omega_n\longrightarrow\mathbb{R}$, la fonction f vue comme une fonction de la variable x_i (à $\hat{x}_i$ fixé, donc)

Pour $x\in\Omega_n$,

$$|D_i f_i|^2(x) = |D_i f_i|^2(\hat{x}_i) = \frac{1}{2}\left(f(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_{i-1},-1,\dots,x_n)\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\left[f(x)-f(\tau_i(x))\right]^2$$

↓ fonction sur Ω_n qui ne dépend que de $\hat{x}_i$ (i.e., fonction sur Ω_{n-1}) car en dim 1 le gradient est constant.

On a alors :

$$|Df|^2(x) = \sum_{i=1}^{n} |D_i f_i|^2(x)$$

C'est la même formule qu'avec le gradient usuel sur $\mathbb{R}^n$ euclidien.

<u>Remarques</u>

1) attention, certains textes mentionnent des définitions différentes du gradient discret, par ex $|Df|^2(x) = \sum_{y\sim x}(f(x)-f(y))^2$ ou $|Df|^2(x) = \frac{1}{4}\sum_{y\sim x}(f(x)-f(y))^2$ ...

2) Gros problème avec le gradient discret

$$|D(\sqrt{f})|^2 = ?$$
$$|D(e^f)|^2 = ?$$

Pas de formule !

Laplacien discret

Pour $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x \in \Omega_n$ on pose

$$\Delta f(x) := \sum_{y \sim x} [f(y) - f(x)] = \sum_{i=1}^{n} [f(\tau_i(x)) - f(x)]$$

Remarque (invariance)

Pour $F : \Omega_n \times \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{x \in \Omega_n} \sum_{\substack{y \in \Omega_n \\ y \sim x}} F(x,y) = \sum_{\substack{(x,y_n) \in \Omega_n \times \Omega_n \\ x \sim y}} F(x,y)$$

$$= \sum_{y \in \Omega_n} \sum_{\substack{x \in \Omega_n \\ x \sim y}} F(x,y)$$

On en tire la relation suivante

Fait Pour $f, g : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$\int g \Delta f \, d\sigma_n = - \int (\nabla f \cdot \nabla g) \, d\sigma_n$$

Démo :

$$-\int g \Delta f \, d\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_x \sum_{y \sim x} g(x) \, (f(x) - f(y))$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_x \sum_{y \sim x} g(y) \, (f(y) - f(x))$$

$=$ demi-somme des deux quantités précédentes ▩

Rq En particulier : $\int \Delta f \, d\sigma_n = 0$

Rq : On a donc que Δ est un opérateur autoadjoint négatif sur $\ell_2^{2^n}$ ...

II) Inégalité de Sobolev logarithmique

<u>Rappel</u> : Pour $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ on pose

$$\mathrm{Ent}_{\sigma_n}(f) = \int f \log(f)\, d\sigma_n - \int f d\sigma_n \log\left(\int f d\sigma_n\right)$$

On a : . $\mathrm{Ent}_{\sigma_n}(f) \geq 0$ et $\mathrm{Ent}_{\sigma_n}(f) = 0 \Leftrightarrow f$ constante $\equiv \int f d\sigma_n$

. $\mathrm{Ent}_{\sigma_n}(\lambda f) = \lambda\, \mathrm{Ent}_{\sigma_n}(f)$, $\lambda \geq 0$

Il existe plusieurs versions non-équivalentes de l'inégalité de log-Sobolev sur Ω_n (pb avec $|\nabla \sqrt{f}|^2$)

On va établir l'inégalité suivante due à Gross.

<u>Theo</u> (Log-Sobolev sur Ω_n)

Soit $g : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{Ent}_{\sigma_n}(g^2) \leq \int |\nabla g|^2 d\sigma_n$$

Le point essentiel est que la constante ne dépend pas de n.

Par tensorisation, il suffit de montrer l'inégalité en dimension 1.

En effet : on rappelle que pour $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\mathrm{Ent}_{\sigma_n}(f) \leq \sum_{i=1}^{n} \int \mathrm{Ent}_{\sigma_1^i}(f_i)\, d\sigma_n$$

où $\mathrm{Ent}_{\sigma_1^i}(f)(x) = \mathrm{Ent}_{\sigma_1^i}(f_i)(\hat{x}_i) = \int f_i \log f_i \, d\sigma_1(x_i) - \int f_i \, d\sigma_1(x_i) \log \int f_i \, d\sigma_1(x_i)$

On a donc, pour $g : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Ent}_{\sigma_n}(g^2) \leq \sum_{i=1}^{n} \int \mathrm{Ent}_{\sigma_1}(g_i^2)\, d\sigma_n$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int \left[\frac{1}{e} \int |\nabla_i g_i|^2 d\sigma_1 \right] d\sigma_n$$

meilleure constante pour log-Sob sur Ω_1

$$\text{or} \quad \int \left(\int |D_i g_i|^2 d\sigma_1(x_i) \right) d\sigma_n = \int \left(\int |D_i g_i|^2 d\sigma_1(x_i) \right) d\sigma_{n-1}(\hat{x}_i)$$

$$= \int |D_i g_i|^2 d\sigma_n$$

et comme $|Dg|^2 = \sum |D_i g_i|^2$ on obtient

$$\mathrm{Ent}_{\sigma_n}(g^2) \leq \frac{1}{\ell} \int |Dg|^2 d\sigma_n$$

Reste à montrer que Log-Sob a lieu sur Ω_1 avec $\ell = 1$.

Soit $g : \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

a-t-on $\quad \mathrm{Ent}_{\sigma_1}(g^2) \leq \int |Dg|^2 d\sigma_1 = \frac{1}{2} (g(1) - g(-1))^2$?

Une fonction g sur $\{-1,1\}$ peut s'écrire : $g(x) = a + bx$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
On a : $g^2(1) = (a+b)^2$ et $g^2(-1) = (a-b)^2$
L'inégalité à montrer est de la forme

fonction symétrique en $g^2(1)$ et $g^2(0)$ $\leq \frac{1}{2}(2b)^2$

Par conséquent, l'inégalité devant être vraie si on échange a et b, le terme de droite peut être remplacé par $2\min(a^2, b^2)$.
On peut donc se ramener au cas où : $a \geq 0$ et $b^2 \leq a^2$
$(a \to -a, b \to -b)$ $\quad (a \leftrightarrow b)$
Par homogénéité de l'inégalité, on peut supposer que $\underline{a = 1}$ (remarquer que si $a = 0$, alors $g \equiv$ cte et il n'y a rien à montrer)
Donc $\quad g(x) = 1 + bx$, $b \in [-1, 1]$
Enfin, par symétrie (de la mesure σ_1 par rapport à $1 \leftrightarrow -1$), on peut supposer que $b \in [0, 1]$. On est donc ramené à :

<u>Fait</u> : Pour $s \in [0, 1]$ on a :

$$\frac{1}{2}(1+s)^2 \log((1+s)^2) + \frac{1}{2}(1-s)^2 \log((1-s)^2) - (1+s^2)\log(1+s^2)$$

$$\leq 2s^2$$

<u>Démo</u> : Posons $\alpha(s) = (1+s)^2 \log(1+s) + (1-s)^2 \log(1-s) - (1+s^2)\log(1+s^2)$

A-t-on $\quad \alpha(s) \leq 2s^2, \ \forall s \in [0, 1]$?

Comme $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, il <u>suffit</u> de mq : $\alpha''(s) \leq 4$ sur $[0,1]$

On a :

$$\alpha'(s) = 2\left[(1+s)\log(1+s) - (1-s)\log(1-s) - s\log(1+s^2) \right]$$

$$\alpha''(s) = 2\Big[\underbrace{\log\Big(\frac{1-s^2}{1+s^2}\Big)}_{\leq 0} - \underbrace{\frac{2s^2}{1+s^2}}_{\leq 0} + 2 \Big]$$

$$\leq 4$$

$\blacksquare$

<u>Application</u> : On retrouve la concentration sur Ω_n.

Pour cela, on a besoin d'un lemme technique :

<u>Lemme</u> : Soit $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $c_1, \dots, c_n \geq 0$ tq

$$(*) \left| \begin{array}{l} \forall x \in \Omega_n : \\ \forall i \leq n : \end{array} \right. \quad |f(x) - f(\tau_i(x))| \leq c_i$$

Alors :

$$\int |\nabla(e^f)|^2 \, d\sigma_n \leq \Big(\sum_{i=1}^n c_i^2 \Big) \int e^{2f} \, d\sigma_n$$

<u>Rq</u> : la condition $(*)$ est équivalente à $\forall x, y \in \Omega_n :$ $|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{x_i \neq y_i}$

ou encore à : $\begin{array}{l} \forall x \in \Omega_n \\ \forall i \leq n \end{array}$ $|D_i f|^2(x) \leq \frac{1}{2} c_i^2$

Ainsi la conclusion exprime aussi que

$$\int |\nabla(e^f)|^2 \, d\sigma_n \leq 2\Big(\sum_{i=1}^n \| |D_i f| \|_\infty^2 \Big) \int e^{2f} \, d\sigma_n$$

<u>Démo</u> : $$\int |\nabla(e^f)|^2 \, d\sigma_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in \Omega_n \\ x \sim y}} \left(e^{f(x)} - e^{f(y)} \right)^2$$

$\hookrightarrow = 0$ si $f(x) = f(y)$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{x \sim y \\ f(x) > f(y)}} \left(e^{f(x)} - e^{f(y)} \right)^2$$

or $\left(e^{f(x)} - e^{f(y)}\right)^2 \leq e^{2f(x)} \big(\underbrace{1 - e^{-(f(x)-f(y))}}\big)^2$

$$0 \leq \quad \leq f(x) - f(y)$$

si $f(x) > f(y)$

On a donc

$$\int |D(e^f)|^2 \, d\sigma_n \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{x \sim y \\ f(x) > f(y)}} (f(x) - f(y))^2 e^{2f(x)}$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \sum_{x \sim y} \quad "$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \Omega_n} e^{2f(x)} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{[f(x) - f(\tau_i(x))]^2}_{\leq c_i^2}$$

■

<u>Rq</u> : On peut améliorer la constante (voir exo.)
On retrouve alors la concentration sur (Ω_n, σ_n) à partir de log-Sobolev (identique au cas gaussien)

<u>Theo</u> : Pour $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \Omega_n$, $\forall i \leq n$

$$|f(x) - f(\tau_i(x))| \leq c_i$$

on a ; $\forall \lambda \geq 0$, $\int e^{\lambda[f - \int f d\sigma_n]} d\sigma_n \leq e^{\lambda^2 C^2/4}$

et donc : $\forall r \geq 0$, $\sigma_n(\{f \geq \int f d\sigma_n + r\}) \leq e^{-r^2/C^2}$

où $\boxed{C^2 = c_1^2 + \dots + c_n^2}$

<u>Démo</u> Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ on applique log-Sob avec $g(x) = e^{\frac{\lambda}{2} f(x)}$

$H(\lambda) = \int e^{\lambda f} d\sigma_n$ $\qquad g^2 = e^{\lambda f}$

on a :

$$\int \lambda f \, e^{\lambda f} d\sigma_n - H(\lambda) \log H(\lambda) \leq \int |D(e^{\frac{\lambda}{2} f})|^2 d\sigma_n$$

$$\leq \frac{\lambda^2}{4} \sum c_i^2 \, H(\lambda)$$ lemme

Soit encore

$$\lambda H'(\lambda) - H(\lambda)\log H(\lambda) \leq \lambda^2 \frac{C^2}{4} H(\lambda)$$

ce que l'on réécrit, pour $\lambda > 0$:

$$\underbrace{\frac{1}{\lambda}\frac{H'(\lambda)}{H(\lambda)} - \frac{1}{\lambda^2}\log H(\lambda)}_{= \left(\frac{1}{\lambda}\log H(\lambda)\right)'(\lambda)} \leq \frac{C^2}{4}$$

En $\lambda = 0$ on voit que $\frac{1}{\lambda}\log H(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} \int f \, d\sigma_n$

Par conséquent, en intégrant l'inégalité on trouve, $\forall \lambda > 0$

$$\frac{1}{\lambda}\log H(\lambda) - \int f \, d\sigma_n \leq \frac{C^2}{4}\lambda$$

■

<u>Exo</u> : À partir de LSI sur (Ω_n, σ_n), retrouver en utilisant le TCL, l'inégalité LSI sur $(\mathbb{R}, \gamma_1)$.

En effet : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et à support compact.

On se donne une suite $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$ de variables de Bernoulli ± 1 indépendantes (par ex : $\begin{matrix}(\Omega_\infty, \sigma_\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x_i\end{matrix}$) $\quad (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \sim \sigma_n$

Pour $n \geq 1$ donné, posons $g_n : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g_n(x) = f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right)$$

Alors :

$$\mathrm{Ent}_{\sigma_n}(g_n^2) = \mathbb{E} f^2\left(\frac{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n}{\sqrt{n}}\right) \log f^2\left(\frac{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n}{\sqrt{n}}\right) - \mathbb{E} f^2\left(\frac{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n}{\sqrt{n}}\right) \log \mathbb{E} f^2\left(\frac{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{Ent}_\gamma(f^2) \quad \text{par le TCL}$$

<u>Or</u> : $\forall x \in \Omega_n$:

$$\frac{1}{2}|g_n(x) - g_n(T_i(x))|^2 = \frac{1}{2}\Big(f'\Big(\tfrac{\sum x_i}{\sqrt{n}}\Big)\frac{2}{\sqrt{n}} + \overset{\text{uniforme}}{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)^2 = 2\frac{f'\big(\frac{\sum x_i}{\sqrt{n}}\big)^2}{n} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)$$

Donc

$$\int |\nabla g|^2 d\sigma_n = n \times \frac{2}{n}\, \mathbb{E} f'^2\left(\frac{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 2\int f'^2 d\gamma_1 \qquad \text{CQFD.}$$

III/ Semi-groupe

On veut considérer le semi-groupe associé à Δ : $P_t = e^{t\Delta}$

Une fonction $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ peut être vue comme un vecteur de $\mathbb{R}^{\Omega_n} \simeq \mathbb{R}^{2^n}$

Ainsi $f(x) = x^{\text{ième}}$ coordonnée de $f \in \mathbb{R}^{\Omega_n}$

L'application $f \longrightarrow \Delta f$ est une application <u>linéaire</u> de $\mathbb{R}^{\Omega_n}$ dans $\mathbb{R}^{\Omega_n}$

<u>Equa-diff linéaire</u> :

Pour $f : \Omega_n \to \mathbb{R}$ donnée, $\exists !\, F : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^{\Omega_n}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tq

$$\left\{ \begin{aligned} F(0) &= f \\ F'(t) &= \Delta F(t) \quad \text{dans } \mathbb{R}^{\Omega_n} \end{aligned} \right.$$

$F(t) : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad F(t)\,(x) = x^{\text{ième}}$ coordonnée de $F(t)$

On a : $F(t) = e^{t\Delta} f$

<u>Notation :</u> $P_t f = F(t) = e^{t\Delta} f$

pour $x \in \Omega_n$: $P_t f(x) = F(t)\,(x) = \left(e^{t\Delta} f\right)(x)$

On a donc :

$$\left\{ \begin{aligned} &P_0 f = f \quad \text{sur } \Omega_n \\ &\forall t > 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} P_t f = \Delta (P_t f) \quad \text{sur } \Omega_n \end{aligned} \right.$$

On a :

- $P_t(P_s f) = P_{t+s} f$
- $P_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$
- $\forall f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad \int P_t f \, d\sigma_n = \int f \, d\sigma_n$

Démo : $\quad \frac{d}{dt} \int P_t f \, d\sigma_n = \int \Delta(P_t f) \, d\sigma_n = 0$

Point de vue Markovien sur Δ et P_t

Soit $K : \Omega_n \times \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ donné par

$$K(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \sim y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\forall x \in \Omega_n$, $\quad \sum_{y \in \Omega_n} K(x,y) = 1$

On dit que K est une transition markovienne : $f \longrightarrow Kf$ où

$\forall x \in \Omega_n$, $\boxed{Kf(x) := \sum_{y \in \Omega_n} f(y)\, K(x,y)} = \frac{1}{n} \sum_{y \sim x} f(y)$

On a : $\quad \Delta f(x) = \sum_{y \sim x} [f(y) - f(x)] = n Kf(x) - n f(x)$

ie : $\quad \Delta = n(K - Id)$

Propriétés évidentes de K :

- $K\mathbb{1} = \mathbb{1}$
- $f \geq 0 \Rightarrow Kf \geq 0$
  et $|Kf| \leq K|f|$
- $\forall p \geq 1$, $\quad |Kf|^p \leq K(|f|^p)$
- $\int Kf \, d\sigma_n = \int f \, d\sigma_n \quad$ et $\quad \boxed{\int g Kf \, d\sigma_n = \int f Kg \, d\sigma_n}$
- $\forall p \geq 1$, $\quad \|Kf\|_{L^p(\sigma_n)} \leq \|f\|_{L^p(\sigma_n)}$

On peut en déduire des propriétés pour P_t :

$$P_t f = e^{-tn(K-I)} f = e^{-tn} e^{tnK} f$$

et donc
$$\underline{P_t f = e^{-tn} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(nt)^r}{r!} K^r(f)} \qquad \text{où } K^r = \underbrace{K\circ\cdots\circ K}_{r \text{ fois}}$$

<u>Rq</u> : Cette série converge normalement pour toute norme sur $\mathbb{R}^{\Omega_n}$
En particulier, elle CV pour chaque x : $P_t f(x) = e^{-tn} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(nt)^r}{r!} (K^r f)(x)$

On dispose donc d'une représentation avec un noyau et une probabilité, puisque $e^{-tn} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(nt)^r}{r!} = 1$

Exemple d'application : on a vu que $\int f Kg \, d\sigma_n = \int g Kf \, d\sigma_n$
on en tire que $\forall r \geq 0$, $\int f K^r g \, d\sigma_n = \int g K^r f \, d\sigma_n$

et donc :
$$\underline{\int (P_t f) g \, d\sigma_n = \int f (P_t g) \, d\sigma_n}$$

(on dit que P_t est reversible par rapport à σ_n)

On a aussi que pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, et $x \in \Omega_n$:

$$\phi(P_t f(x)) \leq e^{-tn} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(nt)^r}{r!} \phi(K^r(f)(x))$$

Comme $\phi(Kf(x)) \leq K(\phi(f))(x)$ puisque $Kf(x) = \sum f(y) \underbrace{K(x,y)}_{\text{proba en } y}$

on a $\phi((K^r f)(x)) \leq K^r(\phi(f))(x)$

et donc $\phi(P_t f(x)) \leq P_t(\phi(f))(x)$

En particulier :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall p \geq 1, \ \forall f : \Omega_n \to \mathbb{R}, \ \forall t \geq 0, \ \forall x \in \Omega_n \\ |P_t f(x)|^p \leq P_t(|f|^p)(x) \end{array}}$$

et en intégrant, on a :

<u>Prop</u> : $\forall f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall p \geq 1$, $\forall t \geq 0$

$$\|P_t f\|_{L^p(\sigma_n)} \leq \|f\|_{L^p(\sigma_n)}$$

Voici un autre résultat utile

Théo : Pour $f : \Omega_n \to \mathbb{R}$ $t \geq 0$ on a : $\forall x \in \Omega_n$:

$$\forall i \leq n : \quad |D_i(P_t f)|^2_{(x)} \leq P_t\left(|D_i f|^2\right)(x)$$

et donc

$$|\nabla(P_t f)|^2_{(x)} \leq P_t\left(|\nabla f|^2\right)(x)$$

Démo :

on commence par observer que

Fait : $\forall i \leq n$, $\quad P_t(f \circ \tau_i) = P_t(f) \circ \tau_i$ sur Ω_n

Démo : Il suffit de vérifier que $K(f \circ \tau_i) = K(f) \circ \tau_i$

Pour $x \in \Omega_n$

$$\begin{aligned} K(f \circ \tau_i) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (f \circ \tau_i)(\tau_j(x)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j(\tau_i(x))) \qquad \} \ \tau_i \circ \tau_j = \tau_j \circ \tau_i \\ &= K(f)(\tau_i(x)) \end{aligned}$$

☒

Terminons la démo du théorème.

Pour $x \in \Omega_n$ donné on a :

$$\begin{aligned} |D_i(P_t f)|(x) &= \frac{1}{2}\left[P_t f(\tau_i(x)) - P_t f(x)\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[P_t(f \circ \tau_i)(x) - P_t f(x)\right]^2 \quad \text{par le Fait} \uparrow. \\ &= \frac{1}{2}\left[P_t(f \circ \tau_i - f)(x)\right]^2 \\ &\leq \frac{1}{2} P_t\left(\left[f \circ \tau_i - f\right]^2\right)(x) \qquad \text{Hölder pour } P_t \\ &= \frac{1}{2} P_t\left(|D_i f|^2\right)(x) \end{aligned}$$

On utilise ensuite que $\quad |\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^{n} |D_i f|^2$

☒

Rq : Cependant, l'inégalité $|\nabla(P_t f)|^2_{(x)} \leq P_t(|\nabla f|^2)(x)$ est à priori trop faible pour fournir une preuve par semi-groupe de log-Sobolev.

IV/ Base de Walsh

Rq : $\Omega_n = \{-1,1\}^n$ est un groupe (commutatif) abélien fini, et donc son dual $\widehat{\Omega_n}$ (forme des caractères sur Ω_n) est isomorphe à Ω_n ---

On met sur $\mathbb{R}^{\Omega_n}$ une métrique l_2 : pour $f, g : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\langle f, g \rangle := \int fg \, d\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \Omega_n} f(x) g(x)$$

et on notera $L^2(\sigma_n) = L^2((\Omega_n, \sigma_n), \mathbb{R}) \simeq l_2^{2^n}$

Rq : Pour être précis, la structure $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est $\frac{1}{2^n} \times$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^{\Omega_n}$.

On note $[n] = \{1, \dots, n\}$ et $2^{[n]} = \{$parties de $[n]\}$

Pour $S \subset [n]$ on définit $w_S : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \Omega_n, \quad w_S(x) = \prod_{i \in S} x_i$$

On a :

- $w_\emptyset \equiv 1$
- Pour $i \leq n$, $w_{\{i\}}(x) = x_i$

  Ainsi les $w_{\{1\}}, \dots, w_{\{n\}} : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des variables de Bernoulli ± 1 indépendantes (définies sur (Ω_n, σ_n))
- Pour $i, j \leq n$, $i \neq j$, $w_{\{i,j\}}(x) = x_i x_j$

Rq : $w_S(x) \in \{-1, 1\}$

<u>Propriété essentielle</u> : w_S est une fonction produit sur le produit Ω_n.

C'est aussi un polynôme homogène en $x_1 \dots x_n$ de degré $|S|$

Rappel : $\begin{cases} \text{si} & f(x) = f_1(x_1, -, x_k)\, f_2(x_{k+1}, -, x_n) \\ \text{alors} & \int f\, d\sigma_n = \int f_1\, d\sigma_k \int f_2\, d\sigma_{n-k} \end{cases}$

On a : $\int w_\emptyset\, d\sigma_n = 1$

Pour $S \subset [n]$, $S \neq \emptyset$, on a :

$$\int w_S\, d\sigma_n = \prod_{i \in S} \int x_i\, d\sigma_1(x_i) = \prod_{i \in S} \left[\tfrac{1}{2}(-1) + \tfrac{1}{2} 1\right] = 0$$

Par ailleurs, $w_S^2 \equiv 1$ et donc $\int w_S^2\, d\sigma_n = 1$

Enfin, pour $S, L \subset [n]$ on a :

$$w_S\, w_L = w_{S \Delta L} \quad \text{où } S \Delta L = (S \setminus L) \cup (L \setminus S)$$

et donc : $\underline{\int w_S\, w_L\, d\sigma_n = 0 \text{ si } S \neq L}$

On a donc :

Prop : $\{ w_S \,;\, S \subset [n] \}$ est une base orthonormée de $L^2(\sigma_n)$

Par conséquent, pour $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$f = \sum_{S \subset [n]} \hat{f}(S)\, w_S \quad \text{où } \hat{f}(S) = \int f w_S\, d\sigma_n$$

et

$$\begin{cases} \langle f, g \rangle = \int f g\, d\sigma_n = \sum_{S \subset [n]} \hat{f}(S)\, \hat{g}(S) \\ \int f^2 d\sigma_n = \sum_{S \subset [n]} \hat{f}(S)^2 \end{cases}$$

Le point important est que Δ est diagonalisable dans cette base.

Soit $S \subset [n]$

$$\Delta w_S(x) = \sum_{i=1}^{n} \big(\underbrace{w_S(\tau_i(x)) - w_S(x)}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin S \\ -2\, w_S(x) & \text{si } i \in S \end{cases}} \big)$$

$$= \sum_{i \in S} (-2 w_S(x))$$

càd :

$$\Delta w_S = -2|S|\, w_S$$

On a donc :

- les w_S forment une b.o.n. de vecteurs propres de Δ
- les vap de $-\Delta$ sont les $2k$, $k \in \mathbb{N}$
- Pour $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta f = -2 \sum_{S \subset [n]} |S|\, \hat{f}(S)\, w_S$$

$$\left[\widehat{\Delta f}(S) = -2|S|\, \hat{f}(S) \right]$$

Par ailleurs, comme $P_t f = e^{t\Delta} f$, on a donc

$$\boxed{P_t f = \sum_{S \subset [n]} e^{-2t|S|}\, \hat{f}(S)\, w_S}$$

On voit, par exemple, que (on aurait pu le voir directement à partir de la définition ...)

Prop : Pour tout $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x \in \Omega_n$ on a :

$$P_t f(x) \xrightarrow[t \to \infty]{} \int f \, d\sigma_n = \hat{f}(\emptyset)$$