Hypercontractivité

I/ Généralités

Soit (Ω, μ) un espace de probabilité et L un opérateur défini sur une partie dense $\mathcal{D}$ de $L^2(\mu)$.
On considère le semi-groupe $P_t = e^{tL}$ et l'on suppose que c'est un semi-groupe Markovien reversible de mesure invariante μ.

Qu'est-ce que ce charabia ?!?

On ne va pas faire de théorie abstraite des semi-groupes.
Pour nous, il s'agit uniquement de considérer les cas suivants :

1) $(\Omega, \mu) = (\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ l'espace Gaussien

$Lf = \Delta f - x \cdot \nabla f$ défini par exemple sur $\mathcal{D}$ = fcts C^∞ ayant toutes ses dérivées à décroissance lente

P_t = semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

2) $(\Omega, \mu) = (\Omega_n, \sigma_n) = (\{-1, 1\}^n, \sigma_n)$

$$Lf(x) = \Delta f(x) \quad \text{Laplacien discret}$$
$$= \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x))$$

Rappelons les propriétés essentielles de $P_t f$

On a :

- $P_{t+s}(f) = P_t(P_s f) \quad \forall s, t \geq 0$
- $f \to P_t f$ est linéaire
- $P_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$

- $f \geq 0 \Rightarrow P_t f \geq 0$
- $|P_t f(x)|^p \leq P_t(|f|^p)(x)$, $\forall p \geq 1$
- $\int g \, P_t f \, d\mu = \int (P_t g) f \, d\mu$

  Ce qui revient à dire que L est autoadjoint sur $L^2(\mu)$
- En particulier : $\int P_t f \, d\mu = \int f \, d\mu$
- $\forall p \geq 1$, $\|P_t f\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}$

  Ainsi, P_t est une contraction de $L^p(\mu)$

__Rq__ : Cette dernière inégalité permet d'étendre P_t à tout $L^p(\mu)$ (à partir de $\mathcal{D}$) dès que $\mathcal{D}$ est aussi dense dans $L^p(\mu)$.

Pour f,g suffisament régulières ($f,g \in \mathcal{D}$) on note

$$\boxed{\mathcal{E}(f,g) := -\int f \, Lg \, d\mu}$$

On a : $\mathcal{E}(f,g) = -\int g \, Lf \, d\mu = \int (Df \cdot Dg)(x) \, d\mu(x)$

En particulier : $\mathcal{E}(f,f) = -\int f \, Lf \, d\mu = \int |Df|^2 \, d\mu$

__Def__ : On dit que (μ, L) vérifient une inégalité de log-Sobolev avec constante $\rho > 0$ [$LSI(\rho)$] si pour toute fonction suffisement régulière $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (par ex $g \in \mathcal{D}$) on a :

$$\mathrm{Ent}_\mu(g^2) \leq \frac{2}{\rho} \mathcal{E}(g,g)$$

Le lemme technique suivant est important pour la suite :

Lemme Pour les 2 cas considérés ici (et plus généralement pour les générateurs L Markoviens réversibles de mesure invariante μ) :

Si (μ, L) vérifie $LSI(\rho)$ alors pour tout $p > 1$ et toute $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ suffisement régulière on a :

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^p) = \mathrm{Ent}_\mu\left(\left(f^{\frac{p}{2}}\right)^2\right) \leqslant \frac{2}{\rho} \times \frac{p^2}{4(p-1)} \mathcal{E}(f^{p-1}, f)$$

Démo : On considère séparement les 2 cas :

$\boxed{\text{Cas 1}}$ (cas continu) : cas gaussien $(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$

Pour f suffisement régulière on a, par hypothèse $LSI(\rho)$

$$\mathrm{Ent}_{\gamma_n}\left(\left(f^{\frac{p}{2}}\right)^2\right) \leq \frac{2}{\rho} \int |D(f^{\frac{p}{2}})|^2 \, d\gamma_n$$

or $\quad |D(f^{\frac{p}{2}})|^2 = \frac{p^2}{4} f^{p-2} Df \cdot Df = \frac{p^2}{4(p-1)} D(f^{p-1}) \cdot Df$

CQFD

$\boxed{\text{Cas 2}}$ (cas discret) (Ω_n, σ_n)

Problème $|D(f^{\frac{p}{2}})|^2 = ??$ aucune formule ...

On a le lemme crucial suivant duquel le résultat se déduit immédiatement :

Lemme : Pour $f : \Omega_n \to \mathbb{R}^+$ et $p > 0$ on a :

$$\mathcal{E}(f^{\frac{p}{2}}, f^{\frac{p}{2}}) \leq \frac{p^2}{4(p-1)} \mathcal{E}(f^{p-1}, f)$$

Démo : on sait que pour $f, g : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(f,g) = \int (Df \cdot Dg)(x)\, d\sigma_n(x)$$

$$= \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2} \sum_{\substack{x,y \in \Omega_n \\ x \sim y}} \left[f(y) - f(x) \right] \left[g(y) - g(x) \right]$$

Par conséquent, le lemme se réduit à démontrer l'inégalité suivante :

$$(*) \quad \left| \begin{array}{l} \forall a, b \geq 0 \qquad \forall p > 1 \\ \left(a^{\frac{p}{2}} - b^{\frac{p}{2}}\right)^2 \leq \frac{p^2}{4(p-1)} \left(a^{p-1} - b^{p-1}\right) \times (a-b) \end{array} \right.$$

Pour montrer $(*)$ on écrit pour a b ;

$$\left(\frac{a^{\frac{p}{2}} - b^{\frac{p}{2}}}{a-b} \right)^2 = \left(\frac{1}{a-b} \times \frac{p}{2} \int_a^b t^{\frac{p}{2}-1}\, dt \right)^2$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\leq} \frac{p^2}{4} \frac{1}{a-b} \int_a^b t^{p-2}\, dt$$

$$= \frac{p^2}{4(p-1)} \frac{a^{p-1} - b^{p-1}}{a-b}$$

CQFD ∎

II) De log-Sobolev à l'hypercontractivité

On sait que $\|P_t f\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}$

En fait on a beaucoup mieux dès qu'une inégalité de log-Sobolev est vérifiée.

<u>Théo</u> : Supposons que (μ, L) vérifie $LSI(\rho)$.

Alors, si $1 < p \leq q$ sont tq $\frac{q-1}{p-1} \leq e^{2\rho t}$, on a

$$\|P_t f\|_{L^q(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \quad , \forall f \in \mathcal{D}.$$

On peut donc choisir $q > p$ dès que $t > 0$. En fait, comme $q' \leq q \Rightarrow \|\cdot\|_{q'} \leq \|\cdot\|_q$ il suffit d'énoncer le théo avec le meilleur q possible :

(*) $\forall f \in \mathcal{D}$: $\|P_t f\|_{L^{p(t)}(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}$

pour $p(t) = 1 + (p-1)e^{2\rho t}$

<u>Rq</u> : La réciproque est également vraie, càd que si on a (*), alors (μ, L) vérifie $LSI(\rho)$. Ce sens est facile.

<u>Démo du théorème</u>

Comme $|P_t f| \leq P_t |f|$ (ponctuellement),

il suffit de montrer l'inégalité dans le cas où $f \geq 0$.

Soit $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow]1, +\infty[$ une fonction C^1 strict. croissante que l'on déterminera plus loin. ("$h(0) = p$")

Tout d'abord remarquons que pour $g \geq 0$, $g \in$: on a :

$$\frac{d}{dq} \|g\|^q_{L^q(\mu)} = \frac{d}{dq} \int e^{q \log(g)} d\mu = \int \log(g)\, g^q \, d\mu$$

ce qui explique pourquoi l'entropie va intervenir.

Etudions

$$\alpha(t) := \log \|P_t f\|_{L^{h(t)}(\mu)} = \frac{1}{h(t)} \log \int (P_t f)^{h(t)} d\mu$$

On a :

$$\alpha'(t) = -\frac{h'(t)}{h^2(t)} \log \int (P_t f)^{h(t)} d\mu + \frac{1}{h(t)} \frac{h'(t)}{\int (P_t f)^{h(t)}} \int \log(P_t f)\, (P_t f)^{h(t)} d\mu$$
$$+ \frac{1}{h(t)} \frac{h(t)}{\int (P_t f)^{h(t)}} \int L(P_t f)\, (P_t f)^{h(t)-1} d\mu$$

On note $F = P_t f$. On a :
(t fixé)

$$\alpha'(t) = \frac{h'(t)}{h^2(t) \int F^{h(t)} d\mu} \left[\mathrm{Ent}_\mu (F^{h(t)}) - \frac{h^2(t)}{h'(t)} \mathcal{E}(F^{h(t)-1}, F) \right]$$

Puisque (μ, L) vérifie $LSI(\rho)$, on sait (Lemme) que, comme $h(t) > 1$ $(t>0)$, on a :

$$\mathrm{Ent}_\mu (F^{h(t)}) \leq \frac{h(t)^2}{4(h(t)-1)} \frac{2}{\rho} \mathcal{E}(F^{h(t)-1}, F)$$

Par conséquent, si on choisit h tq

$$\frac{h^2(t)}{h'(t)} = \frac{2}{\rho} \frac{h^2(t)}{4(h(t)-1)} \qquad (*) \leftarrow \text{ie } \boxed{h'(t) = \frac{\rho}{2}(h(t)-1)}$$

alors on a : $\alpha'(t) \quad 0$ et donc $\alpha \downarrow$ et donc
$$\|P_t f\|_{h(t)} \leq \|P_t f\|_{h(0)}$$

Or les solutions de $(*)$ sont précisément de la forme
$$h(t) = 1 + (h(0)-1)\, e^{2\rho t}$$

Rq : Attention à la convention choisie pour la constante de Sobolev logarithmique ... (cela varie suivant les ouvrages).

On peut retenir que si $\forall f \in \mathcal{D}$:

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq C \int |\nabla f|^2 \, d\mu$$

alors on a l'hypercontractivité : $\forall p \geq 1$

$$\| P_t f \|_{L^{p(t)}(\mu)} \leq \| f \|_{L^p(\mu)}$$

avec $\quad p(t) = 1 + (p-1)\, e^{\frac{4}{C} t}$

III / Cas gaussien

La mesure gaussienne standard γ_n sur $\mathbb{R}^n$ vérifie $LSI(1)$:

$$\forall g \in \mathcal{D} : \quad Ent_{\gamma_n}(g^2) \leq 2 \int |\nabla g|^2 \, d\gamma_n = -2 \int g L g \, d\gamma_n$$

où L est le générateur d'Ornstein-Uhlenbeck

On a donc

<u>theo</u> : Soit P_t le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^n$.
Alors pour $f \in \mathcal{D}$ on a : $\forall p \geq 1$,

$$\| P_t f \|_{L^{q(t)}(\gamma_n)} \leq \| P_t f \|_{L^p(\gamma_n)}$$

où $q(t) = 1 + (p-1) e^{2t}$

<u>Rq</u> : Puisque $\|g\|_{L^q(\gamma_n)} = \sup_{\|h\|_{L^{q'}(\gamma_n)} \leq 1} \int g h \, d\gamma_n$ où $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$

on a que le theo est équivalent à : $\forall f \in L^p(\gamma_n)$ $\forall h \in L^{q'}(\gamma_n)$

$$\int P_t f(x) \, h(x) \, d\gamma_n(x) \leq \|f\|_{L^p(\gamma_n)} \, \|h\|_{L^{q'}(\gamma_n)}$$

~~lorsqu~~ dit encore :

$$\iint f(e^{-t} x + \sqrt{1 - e^{-2t}}\, y) \, h(x) \, d\gamma_{2n}(x,y) \leq \|f\|_{L^p(\gamma_n)} \|h\|_{L^{q'}(\gamma_n)}$$

On a $q' = \frac{q}{q-1} = 1 + \frac{1}{p-1} e^{-2t}$. Si on introduit $\underline{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]}$
tel que $\underline{\cos(\theta) = e^{-t}}$ on a : $\forall f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\boxed{\iint f(\cos(\theta) x + \sin(\theta) y) \, h(x) \, d\gamma_{2n}(x,y) \leq \|f\|_{L^p(\gamma_n)} \|h\|_{L^{q'}(\gamma_n)} \quad \text{avec} \quad q' = 1 + \frac{\cos^2(\theta)}{p-1}}$$

Il est intéressant de diagonaliser L (et donc P_t).
Rappeler brièvement la (ou plutôt une des) définition des polynômes de Hermite et leurs propriétés.

Dimension 1 : $(n = 1)$

On peut définir h_n par la formule :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} h_n(x)$$

$h_0(x) \equiv 1$
$h_1(x) = x$
$h_2(x) = x^2 - 1$

On montre alors que h_n est un polynôme de degré n et que les $\{h_n ; n \in \mathbb{N}\}$ forment une base orthogonale (non normalisée) de $L^2(\mathbb{R}, \gamma_1)$

Par ailleurs on a : $\quad h_n'' - x h_n' + n h_n = 0$

Ce qui veut dire que h_n est un vecteur propre de L (associé à la vap $-n$)

Ainsi :
- les vap de $-L$ sont exactement les entiers $\mathbb{N}$
- L se diagonalise dans la base $\{h_n ; n \in \mathbb{N}\}$
- Chaque vap $n \in \mathbb{N}$ de $-L$ a une multiplicité 1.

Remarque : déf équivalente, $h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$

Dimension $n \geq 2$

On travaille avec des multi-indices

$$\alpha \in \mathbb{N}^n \qquad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

On convient que

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

et pour $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\quad \lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n}$

On définit les polynôme de Hermite n-dimensionnels par :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : \quad H_\alpha(x) = h_{\alpha_1}(x_1) \dots h_{\alpha_n}(x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Il s'agit d'un polynôme en n variables de degré $|\alpha|$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n \qquad e^{\lambda \cdot x - |\lambda|^2/2} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\lambda^\alpha}{\alpha!} H_\alpha(x)$$

<u>Prop</u> : Les polynômes $\{H_\alpha \,;\, \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ forment une base orthogonale de $L^2(\gamma_n)$

Regardons les premiers polynômes :

- $|\alpha| = 0$: $\quad H_0(x) \equiv 1$
- $|\alpha| = 1$: $\quad H_{(1,\dots,0)}(x) = x_1$

$$H_{(0,1,\dots,0)}(x) = x_2$$
$$\vdots$$
$$H_{(0,\dots,1)}(x) = x_n$$

<u>Donc</u> : $\text{Vect}\{H_\alpha \,;\, |\alpha| = 1\}$ = formes linéaires de $\mathbb{R}^n$

- $|\alpha| = 2$ exemples : $x \to x_1^2 - 1$, $x \to x_1 x_2$, ...

<u>Rq</u> : que vaut $\dim \text{Vect}\{H_\alpha \,;\, |\alpha| = k\}$?

Réponse : $|\{\alpha \in \mathbb{N}^n \,;\, |\alpha| = k\}|$

$$= |\{\alpha \in \mathbb{N}^n \,;\, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k\}|$$

$$=: f_n(k) = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

$f_n(0) = 1$

$f_n(1) = n$

On notera dans la suite $\boxed{\tilde{H}_\alpha = \frac{1}{\|H_\alpha\|_{L^2(\gamma_n)}} H_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} H_\alpha}$

Si on note $\hat{f}(\alpha) = \int f \tilde{H}_\alpha \, d\gamma_n$ pour $f \in L^2(\gamma_n)$
$\alpha \in \mathbb{N}^n$

on a :

$$f = \sum \hat{f}(\alpha) \tilde{H}_\alpha \quad \text{dans } L^2(\gamma_n)$$

$$\|f\|^2_{L^2(\gamma_n)} = \sum \hat{f}(\alpha)^2$$

Le point crucial est que : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \Delta H_\alpha - x \cdot DH_\alpha + |\alpha| H_\alpha = 0$

<u>càd</u> : $\underline{L H_\alpha = -|\alpha| H_\alpha}$ (idem avec $\tilde{H}_\alpha$ bien sûr)

Ainsi $\{\tilde{H}_\alpha\}$ forme une bon de vecteurs propres de L. Les valeurs propres de $-L$ sont les entiers $\mathbb{N}$, et chaque $k \in \mathbb{N}$ a pour multiplicité $f_n(k)$.

On a :

$$Lf = -\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |\alpha| \hat{f}(\alpha) \tilde{H}_\alpha$$

et

$$\boxed{P_t f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} e^{-t|\alpha|} \hat{f}(\alpha) \tilde{H}_\alpha} \quad \text{dans } L^2(\gamma_n)$$

On retrouve que $\left\| P_t f - \int f \, d\gamma_n \right\|_{L^2(\gamma_n)} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

Il est utile de regrouper les termes par degré $\Leftrightarrow$ par vap. de L

On note $\mathcal{H}_k = \text{Vect}(H_\alpha \,;\, |\alpha| = k)$ de dim $f_n(k)$

et $Q_k = P_{\mathcal{H}_k}$ = projection orthogonale dans $L^2(\gamma_n)$ sur l'espace $\mathcal{H}_k$

$$Q_k(f) = \sum_{|\alpha| = k} \hat{f}(\alpha) \tilde{H}_\alpha$$

On a :

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k$$

et

$$P_t = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} Q_k \quad \text{sur } L^2(\gamma_n)$$

le fait que sur l'espace $\mathcal{H}_k$, P_t agisse comme une multiplication par e^{-kt} a des conséquences intéressantes.

Comme
$$H_1 = \{ x \longrightarrow x\cdot u \ ;\ u \in \mathbb{R}^n \}$$
on a, en notant $h_u(x) = x\cdot u$,
$$P_t h_u = e^{-t} h_u$$
Ecrivons l'hypercontractivité avec $p=2$ et pour $p \geqslant 2$ on introduit $t>0$ tel que $p = 1+e^{+2t}$

Alors : $\| P_t h_u \|_{L^p(\gamma_n)} \leqslant \| h_u \|_{L^2(\gamma_n)}$ lien $\boxed{e^t = \sqrt{p-1}}$

or : $\| P_t h_u \|_{L^p(\gamma_n)} = \| e^{-t} h_u \|_{L^p(\gamma_n)} = e^{-t} \| h_u \|_{L^p(\gamma_n)} = \dfrac{1}{\sqrt{p-1}} \| h_u \|_{L^p(\gamma_n)}$

on a donc :
$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \forall p \geqslant 2 \ : \quad \| h_u \|_{L^p(\gamma_n)} \leqslant \sqrt{p-1}\, \| h_u \|_{L^2(\gamma_n)}}$$

On retrouve l'inégalité de Khintchine Ψ_2 pour h_u ~~sest~~ γ_n.
On a même la meilleure constante possible dans cette inégalité (notez que $\sqrt{p-1} \leqslant \sqrt{p}$)

On a aussi l'extension suivante :

<u>Théo</u> : Soit $P \in \mathbb{R}_d[x_1, \dots, x_n]$ un polynôme en $x_1, \dots, x_n$ de degré $\leqslant d$ sans termes constants.
Alors, $\forall p \geqslant 2$ $\quad \| P \|_{L^p(\gamma_n)} \leqslant \sqrt{d}\, (\sqrt{p-1})^d \, \| P \|_{L^2(\gamma_n)}$

<u>Démo</u> : $P = \sum_{k=1}^{d} Q_k(P)$

$$\begin{aligned}
\| P \|^2_{L^p} &\leqslant (d\cancel{+1}) \sum_{k=0}^{d} \| Q_k(P) \|^2_{L^p} = (d\cancel{+1}) \sum_{k=0}^{d} e^{2kt} \| P_t(Q_k(P)) \|^2_{L^p} \\
&\leqslant (d\cancel{+1}) e^{2dt} \sum_{k=0}^{d} \| Q_k(P) \|^2_{L^2} \\
&= (d\cancel{+1}) (e^{2t})^d \, \| P \|^2_{L^2}
\end{aligned}$$
∎

IV/ Cas $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$

On a vu que (Ω_n, σ_n) avec le générateur $L = \Delta$ vérifie $LSI(2)$: $\mathrm{Ent}_{\sigma_n}(g^2) \leq \int |\nabla g|^2 \, d\sigma_n$

On a donc

Théo : Pour le semi-groupe $P_t = e^{t\Delta}$ sur Ω_n on a $\forall f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall t \geq 0$, $\forall p \geq 1$

$$\| P_t f \|_{L^{p(t)}(\sigma_n)} \leq \| f \|_{L^p(\sigma_n)}$$

où $\quad p(t) = 1 + (p-1)\, e^{4t}$

Soit $\{w_S\}$ la base de Walsh de $L^2(\sigma_n)$:

$$w_S(x) = \prod_{i \in S} x_i \qquad \begin{array}{l} x \in \Omega_n \\ S \subset [n] \end{array}$$

On a :
$$f = \sum_{S \subset [n]} \hat{f}(S)\, w_S$$

et
$$P_t f = \sum_{S \subset [n]} e^{-2|S|t}\, \hat{f}(S)\, w_S$$

Posons
$$\varepsilon = e^{-2t} \in [0, 1]$$

et
$$Q_\varepsilon = P_{\sqrt{\log \frac{1}{\varepsilon}}} = P_t \qquad \left| \begin{array}{l} Q_1 f = f \\ Q_\varepsilon f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int f \, d\sigma_n \end{array} \right.$$

On a :
$$Q_\varepsilon f = \sum_{S \subset [n]} \varepsilon^{|S|}\, \hat{f}(S)\, w_S$$

On peut reformuler l'hypercontractivité :

$$\| Q_\varepsilon f \|_{L^{p(\varepsilon)}(\sigma_n)} \leq \| f \|_{L^p(\sigma_n)}$$

si $p \geq 1$ et $p(\varepsilon) = 1 + \frac{p-1}{\varepsilon^2}$

En particulier, lorsque $p = 2$:

<u>theo</u> : $\forall f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon \in]0,1]$

$$\Big\| \sum_{S \subset [n]} \varepsilon^{|S|} \hat{f}(S)\, w_S \Big\|_{L^p(\sigma_n)} \leq \Big\| \sum_{S \subset [n]} \hat{f}(S)\, w_S \Big\|_{L^2(\sigma_n)}$$

pour $p = 1 + \frac{1}{\varepsilon^2}$

Supposons que $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_{\{i\}}$

Alors $Q_\varepsilon f = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_{\{i\}} = \varepsilon f$

on a donc : $\varepsilon \| f \|_{L^p(\sigma_n)} = \| Q_\varepsilon f \|_{L^p(\sigma_n)}$

et si $p \geq 2$ est donné, en prenant $\varepsilon^2 = \frac{1}{p-1}$ on obtient donc :

<u>theo</u> : $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\forall p \geq 2$

$$\Big\| \sum \alpha_i w_{\{i\}} \Big\|_{L^p(\sigma_n)} \leq \sqrt{p-1}\, \Big\| \sum \alpha_i w_{\{i\}} \Big\|_{L^2(\sigma_n)}$$

C'est l'inégalité de Khintchine, puisque si $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont des variable de Bernoulli ± 1 indépendantes, (~~sur~~ $(\Omega, \mathbb{P})$), alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i$ a la même loi sous $\mathbb{P}$ que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_{\{i\}}$ sous σ_n.

On peut ici encore obtenir un résultat pour les chaos d'ordres supérieurs

<u>theo</u> : Soit $d \leq n$.

- Si $f = \sum_{\substack{S \subset [n] \\ |S| = d}} \alpha_S w_S$ $\quad (\alpha_S \in \mathbb{R})$

alors

$$\forall p \geq 2 : \quad \|f\|_{L^p(\sigma_n)} \leq \left(\sqrt{p-1}\right)^d \|f\|_{L^2(\sigma_n)}$$

- Si $f \in \mathrm{Vect}\left(\{w_S \, ; \, |S| \leq d\}\right)$ $\quad \left(f = \sum_{|S| \leq d} \alpha_S w_S\right)$

alors

$$\forall p \geq 2 : \quad \|f\|_{L^p(\sigma_n)} \leq \sqrt{d+1} \left(\sqrt{p-1}\right)^d \|f\|_{L^2(\sigma_n)}$$

La démonstration est identique au cas gaussien.

<u>Cas $p \in]1,2]$</u>

L'hypercontractivité permet aussi d'obtenir directement les ineg. de Khintchinne entre $p \in]1,2]$ et 2.

<u>theo</u> : Soit $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_{\{i\}}$ et $p \in]1,2]$

Alors :

$$\|f\|_{L^2(\sigma_n)} \leq \frac{1}{\sqrt{p-1}} \|f\|_{L^p}$$

<u>Démo</u> : on applique l'hypercont. pour p et $p(t) = 1 + (p-1)e^{-4t} = 2$

<u>càd</u> : $e^{-4t} = \frac{1}{p-1}$ $\quad \square$

<u>Rq</u> : On n'obtient pas Khintchinne pour le cas <u>$p = 1$</u>

Pour ce cas, il faut refaire l'argument classique à partir des cas <u>$p \geq 2$</u> (Hölder)

V / Une inégalité de Talagrand sur le cube discret Ω_n

<u>Rappel</u> : Si (Ω, μ) est un espace de probabilité, la <u>variance</u> d'une fonction $f \in L^2(\mu)$ par rapport à μ est définie par :

$$\mathrm{Var}_\mu(f) = \int \left(f - \int f d\mu\right)^2 d\mu$$
$$= \int f^2 d\mu - \left(\int f d\mu\right)^2$$

Sur (Ω_n, σ_n) on a l'inégalité de Poincaré (ou de trou spectral) suivante : $\forall f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathrm{Var}_{\sigma_n}(f) \leq \frac{1}{2} \int |\nabla f|^2 d\sigma_n = -\frac{1}{2} \int f \Delta f \, d\sigma_n .$$

Cette inégalité s'obtient directement à partir de la décomposition spectrale de Δ. On peut aussi la déduire de l'inégalité de log-Sob sur Ω_n.

On va substituer la notation ∂_i à ∇_i. Plus précisément, pour $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $i \leq n$, on note $\partial_i f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction :

$$\partial_i f = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(f \circ \tau_i - f \right)$$

de sorte que :

$$|\nabla_i f|^2_{(x)} = (\partial_i f)^2_{(x)}$$

On a donc :

$$|\nabla f|^2(x) = \sum_{i=1}^n (\partial_i f)^2_{(x)}$$

et

$$\int |\nabla f|^2 d\sigma_n = \| |\nabla f| \|^2_{L^2(\sigma_n)} = \sum_{i=1}^n \| \partial_i f \|^2_{L^2(\sigma_n)}$$

<u>theo</u> : Pour tout $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{Var}_{\sigma_n}(f) \leq 8 \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\partial_i f\|^2_{L^2(\sigma_n)}}{1 + \log\left(\frac{\|\partial_i f\|^2_{L^2(\sigma_n)}}{\|\partial_i f\|^2_{L^1(\sigma_n)}}\right)}$$

<u>Démo</u> : Soit $P_t = e^{t\Delta}$ sur Ω_n

Comme $P_0 f = f$ et $P_t f \xrightarrow[t\to+\infty]{} \int f \, d\sigma_n$ on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\mu(f) &= -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_n} |P_t f|^2 d\sigma_n\right] dt \\ &= -2\int_0^\infty \int_{\Omega_n} P_t f \, L(P_t f) \, d\sigma_n \, dt \\ &= 2\int_0^\infty \int_{\Omega_n} |\nabla P_t f|^2 d\sigma_n \, dt\end{aligned}$$

Problème ! Si on utilise $\int |\nabla P_t f|^2 d\sigma_n \leq \int P_t(|\nabla f|^2) \, d\sigma_n = \int |\nabla f|^2 d\sigma_n$ c'est l'échec ! (car $\int_0^{+\infty} dt = +\infty$ ...)

On doit s'y prendre autrement (dans le cas gaussien $(\mathbb{R}^n, \gamma_n, L)$ on aurait pas eu ce problème).

Le lemme suivant nous dit qu'on a pas besoin d'intégrer jusqu'à $+\infty$.

<u>Lemme</u> : Pour $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $T > 0$ on a :

$$\mathrm{Var}_\mu(f) = \left\| f - \int f \, d\sigma_n \right\|^2_{L^2(\sigma_n)} \leq \frac{1}{1 - e^{-4T}} \left[\|f\|^2_{L^2(\sigma_n)} - \|P_T f\|^2_{L^2(\sigma_n)} \right]$$

<u>Démo du lemme</u> : Cela repose sur la décomposition spectrale de P_t (et en fait cela découle de l'inégalité de Poincaré mentionnée plus haut)

Comme $P_T f = \int f\, d\sigma_n + \sum_{\substack{S\subset[n]\\ |S|\geq 1}} e^{-2|S|t} \hat{f}(S)\, w_S$

on a :

$$\| P_T f - \int f\, d\sigma_n \|^2_{L^2(\sigma_n)} \leq e^{-4t} \| f - \int f\, d\sigma_n \|^2_{L^2(\sigma_n)} \quad (*)$$

Le lemme n'est qu'une réécriture de cette inégalité.
En effet, (*) peut s'écrire sous la forme

$$(1-e^{-4T}) \| f - \int f\, d\sigma_n \|^2_{L^2(\sigma_n)} \leq \| f - \int f\, d\sigma_n \|^2_{L^2(\sigma_n)} - \| P_T f - \int f\, d\sigma_n \|^2_{L^2(\sigma_n)}$$

et comme $\int P_T f\, d\sigma_n = \int f\, d\sigma_n$, on a :

$$\| f - \int f\, d\sigma_n \|^2_{L^2(\sigma_n)} - \| P_T f - \int f\, d\sigma_n \|^2_{L^2(\sigma_n)} = \| f \|^2_{L^2(\sigma_n)} - \| P_T f \|^2_{L^2(\sigma_n)}$$

■

Reprenons la démonstration du théorème. Pour $T>0$ fixé on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\mu(f) &\leq \frac{1}{1-e^{-4T}} \left(\| f \|^2_{L^2(\sigma_n)} - \| P_T f \|^2_{L^2(\sigma_n)} \right) \\ &= -\frac{1}{1-e^{-4T}} \int_0^T \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_n} (P_t f)^2\, d\sigma_n \right] dt \\ &= \frac{2}{1-e^{-4T}} \int_0^T \int_{\Omega_n} |\nabla P_t f|^2\, d\sigma_n\, dt \end{aligned}$$

On a : $\int |\nabla P_t f|^2\, d\sigma_n = \sum_{i=1}^n \int (\partial_i P_t f)^2\, d\sigma_n$

On utilise maintenant une

<u>lemme</u> : $\partial_i (P_t f) = P_t(\partial_i f)$
et donc $(\partial_i (P_t f))^2 = (P_t(\partial_i f))^2$

Démo : déjà vu --- ($P_t(f\circ \tau_i) = P_t(f)\circ \tau_i$) ■

On a donc ; pour chaque $i \leq n$

$$\int (\partial_i P_t f)^2 \, d\sigma_n = \int (P_t(\partial_i f))^2 \, d\sigma_n$$

$$= \| P_t(\partial_i f) \|^2_{L^2(\sigma_n)}$$

On utilise maintenant l'hypercontractivité avec $q = 2$ et $t \in [0,T]$ donné... et donc avec p : tel que

$$2 = 1 + (p-1) e^{4t}$$

càd :
$$p := 1 + e^{-4t} \leq 2$$

On a :
$$\| P_t(\partial_i f) \|^2_{L^2(\sigma_n)} \leq \| \partial_i f \|^2_{L^{\;}(\sigma_n)}$$

On a donc :

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-e^{-4T}} \int_0^T \| \partial_i f \|^2_{L^{1+e^{-4t}}(\sigma_n)} \, dt \qquad \Big\} \ v = 1 + e^{-4t}$$

$$= 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-e^{-4T}} \times \frac{1}{4} \int_{1+e^{-4T}}^2 \| \partial_i f \|^2_{L^v(\sigma_n)} \frac{dv}{v-1}$$

or pour $v \in [1+e^{-4T}; 2]$ on a :
$$\frac{1}{v-1} \leq e^{4T}$$

Donc
$$\mathrm{Var}_{\sigma_n}(f) \leq 2 \underbrace{\min_{T>0} \left\{ \frac{e^{4T}}{4(1-e^{-4T})} \right\}}_{\text{atteint pour } e^{4T} = 2 \ \downarrow 1} \int_1^2 \| \partial_i f \|^2_{L^v(\sigma_n)} \, dv$$

et donc

$$\boxed{\mathrm{Var}_{\sigma_n}(f) \leq 2 \sum_{i=1}^n \int_1^2 \| \partial_i f \|_{L^v(\sigma_n)} \, dv} \quad (**)$$

Rq : Cette inégalité est en fait intéressante en elle même.

Pour conclure, on utilise l'inégalité de Hölder.
Soit $g \in L^2(\gamma_n)$. On doit estimer $\int_1^2 \|g\|^2_{L^v(\sigma_n)}\, dv$

Comme pour $v \in [1,2]$: $\frac{1}{v} = \underbrace{\left(\frac{2}{v}-1\right)}_{\in[0,1]} \times 1 + \left(2-\frac{2}{v}\right) \times \frac{1}{2}$

on a :
$$\|g\|_{L^v(\sigma_n)} \leq \|g\|^{\frac{2}{v}-1}_{L^1(\sigma_n)} \|g\|^{2-\frac{2}{v}}_{L^2(\sigma_n)}$$
$$= \frac{y}{\sqrt{x}} A^{-1/v}$$

en posant $\begin{cases} x = \|g\|^2_{L^1(\sigma_n)} \\ y = \|g\|^2_{L^2(\sigma_n)} \\ A = \frac{y}{x} \geq 1 \end{cases}$

On a donc :
$$\int_1^2 \|g\|^2_{L^v(\sigma_n)}\, dv \leq \frac{y^2}{x} \int_1^2 A^{-2/v}\, dv$$
$v = 1/v$
$$= yA \int_{\frac{1}{2}}^1 A^{-2s} \frac{ds}{s^2}$$
$s^2 \geq \frac{1}{4}$
$$\leq 4yA \int_{\frac{1}{2}}^A A^{-2s}\, ds$$
$$= 4yA \frac{A-1}{2A^2 \log(A)}$$

On a donc : $\int_1^2 \|g\|^2_{L^v(\sigma_n)}\, dv \leq 2y \frac{A-1}{A\log(A)}$ où $A = \left(\frac{\|g\|_{L^2}}{\|g\|_{L^1}}\right)^2$
$y = \|g\|^2_{L^2}$

<u>Remarque</u> : Si on utilise que $\frac{A-1}{A\log(A)} \leq 1$, on déduit de (**) que $\mathrm{Var}_{\sigma_n}(f) \leq 2\sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|^2_{L^2(\sigma_n)} = 2\| |\nabla f|^2 \|_{L^2(\sigma_n)}$
c'est à dire l'estimation spectrale (Poincaré).

Pour obtenir le théo. on utilise que : $\frac{A-1}{A\log(A)} \leq \frac{2}{1+\log(A)}$
combiné à (**) ∎

le cas gaussien est identique (il est même plus direct).

Rappelons que pour $f \in L^2(\gamma_n)$ suffisamment régulière :

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \int |\nabla f|^2 \, d\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\gamma_n)}$$

<u>Théo</u> Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière (par ex $f \in L^2(\gamma_n)$ et f loc-lip), on a :

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq 4 \sum_{i=1}^{n} \frac{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\gamma_n)}}{1 + \log\left(\dfrac{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\gamma_n)}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^1(\gamma_n)}} \right)}$$

<u>Démo</u> :

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) = 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla P_t f|^2 \, d\gamma_n \, dt$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} \int\int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial x_i} P_t f \right|^2 d\gamma_n \, dt$$

or $\left| \frac{\partial}{\partial x_i} P_t f \right|^2 = e^{-2t} \left| P_t \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2$

et $\left\| P_t \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\gamma_n)} \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^{1+e^{-2t}}(\gamma_n)}$ car $\frac{2-1}{(1+e^{-2t})-1} \leq e^{2t}$

Donc

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq 2 \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty e^{-2t} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^{1+e^{-2t}}(\gamma_n)} dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^{1+v}(\gamma_n)} dv \qquad e^{-2t} = v$$

La fin est alors identique. ∎