Inégalité de Berry-Esséen par la méthode de Stein

I/ Le théorème

On note $\Phi(x) = \gamma_1(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(G \leq x)$ pour G v.a. gaussienne standard

$$= \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$$

Théo Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes centrées ($\mathbb{E} X_i = 0$)

Alors, si $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_i|^2 = 1$, on a, pour la v.a.

$$W := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

que $$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}(W \leq x) - \Phi(x) \right| \leq 11 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_i|^3$$

Rq : Noter que $\mathbb{E} W = 0$, $\mathbb{E}|W|^2 = \mathrm{Var}(W) = 1$

Cor Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indep. centrées et de variance 1 ($\mathbb{E}|X_i|^2 = 1$)

On suppose que $\forall i \leq n$, $\mathbb{E}|X_i|^3 \leq \tau$ $(\tau > 0)$.

Alors on a, $\forall a \in \mathbb{R}^n$ avec $\|a\|_{\ell_2^n} = 1$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq 11 \tau \|a\|_{\ell_3^n}^3$$

En particulier, si on pose $S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$

on a :
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}(S_n \leq x) - \Phi(x) \right| \leq \frac{11 \tau}{\sqrt{n}}$$

Le TCL dit exactement que pour $x \in \mathbb{R}$, $\left| \mathbb{P}(S_n \leq x) - \Phi(x) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

↳ pour une suite X_i de v.a. centrées de variance 1

Ici on a beaucoup mieux

→ Résultat uniforme et universel $\sup_{\mathbb{R}} | \quad | \leq o(1)$

→ Estimée explicite et uniforme de la vitesse de CV en $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

II) Estimées dans l'équation de Stein

Rappel : Ornstein-Uhlenbeck $Lf = f'' - xf' = g' - xg$ si $g = f'$

On définit
$$Sh = h' - xh \quad \text{pour } h \ C^1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

Si G variable gaussienne standard on a ; par IPP,
$$\mathbb{E}(Sh)(G) = 0$$

ce qu'on écrit aussi
$$\mathbb{E}\, h'(G) = \mathbb{E}\, G h(G) \qquad (S)$$

Equation de Stein

Cette équation caractérise la gaussienne standard.

Pour f donnée, on cherche à résoudre $f = Sh$

Une condition nécessaire est que $\mathbb{E} f(G) = 0$

Notons $Nf := \mathbb{E} f(G) = \int f \, d\gamma_1$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

De sorte que $\mathbb{E}(f - Nf)(G) = 0$

Régularité :

Soit $\mathcal{C}_{cb} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ f$ continue et C^1 par morceaux$\}$

ie f continue et $\exists\, a_0, \ldots, a_k$ tq
$f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ = trace d'une fct C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$

Pour $f \in \mathcal{C}_{cb}$ on a : $\forall a, b \in \mathbb{R}$
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt$$
$$= \int_0^1 f'(t + (b-a)s)\, (b-a)\, ds$$

càd, si Θ unif sur $[0,1]$
$$f(b) - f(a) = \mathbb{E}\, f'(t + \Theta(b-a))\,(b-a)$$

Lemme Soit $f \in \mathcal{C}_{cb}$ avec $f' \in L^1(\mathbb{R})$.

Alors $\exists\, h \in C^1$ tq

$$Sh = f - Nf$$

et h est donnée par

$$h(w) = e^{w^2/2} \int_{-\infty}^{w} [f - Nf](x)\, e^{-x^2/2}\, dx$$

Cette solution vérifie

$$\sup_{\mathbb{R}} |h| \le \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \sup_{\mathbb{R}} |h'| \le \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Démo : $\int |f'| < +\infty \Rightarrow f$ est bornée sur $\mathbb{R}$

Donc h est bien définie, C^1 et on a bien

$$h'(w) = w\, h(w) + (f - Nf)(w) \quad \text{ie } Sh = f - Nf$$

On peut écrire

$$f(x) = -\int_x^{+\infty} f'(y)\, dy = -\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]-\infty, y]}(x)\, f'(y)\, dy$$

car $\mathbb{1}_{]-\infty, y]}(x) = \mathbb{1}_{[x, +\infty[}(y)$

Donc $(f - Nf)(x) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi_y(x)\, f'(y)\, dy$

où $\varphi_y = \mathbb{1}_{]-\infty, y]} - \Phi(y)$

Donc

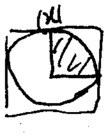
$$h(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{x} (f(t) - Nf)\, e^{-t^2/2}\, dt = \int_{y \in \mathbb{R}} f'(y)\, k_y(x)\, dy$$

où $k_y(x) = \sqrt{2\pi}\, e^{x^2/2} \left(\Phi(x \wedge y) - \Phi(x)\Phi(y) \right)$

Notez que $k_y \ge 0$ car $0 \le \Phi \le 1$

On a : $\Phi(x \wedge y) - \Phi(x)\Phi(y) \le \Phi(x) - \Phi(x)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 4\left(\Phi(x) - \frac{1}{2}\right)^2\right)$

$\Phi \in]0,1[\Rightarrow$



$$\left(\Phi(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = \cancel{\tfrac{1}{4}} \left(\int_0^{|x|} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 \ge \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{4} \int_{t^2 + s^2 \le x^2} e^{-\frac{t^2 + s^2}{2}}\, ds\, dt = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-x^2/2}\right)$$

Donc $\quad 0 \leq K_y(x) \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$

On a donc $\quad \sup|h| \leq \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int |g'|$

D'autre part

$$h'(x) = x h(x) + (g - Ng)(x)$$

$$= -\int_{y \in \mathbb{R}} \underbrace{\left[x K_y(x) + \psi_y(x) \right]}_{\circledast} g'(y)\, dy$$

$$\circledast = \sqrt{2\pi}\, x e^{-x^2/2} \left(\phi(x \wedge y) - \phi(x)\phi(y) \right) + \mathbb{1}_{]-\infty, y]}(x) - \phi(y)$$

On distingue les 4 cas ... par exemple

$\boxed{x \geq 0} \Rightarrow \quad 1 - \phi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x} e^{-x^2/2}$

→ Donc si $\quad y \geq x \geq 0 \qquad \circledast = \underbrace{\sqrt{2\pi}\, x e^{+x^2/2} \overbrace{(1-\phi(y))}^{\leq 1-\phi(x)} \phi(x)}_{\in [0, \phi(x)]} + \underbrace{1 - \phi(y)}_{\in [1-\phi(x), 1]}$

Donc $\quad 0 \leq \circledast \leq 1$

→ Si $\quad x \geq 0$ et $y \leq x$

$$\circledast = \underbrace{\sqrt{2\pi}\, x e^{x^2/2} (1-\phi(x))\, \phi(y)}_{\in [0, \phi(y)]} - \phi(y)$$

Donc $\quad -1 \leq \circledast \leq 0$

On a donc $\quad |\circledast| \leq 1$

Idem pour $\boxed{x \leq 0}$

On a donc bien $\quad |h'(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |g'|$

III/ Démonstration du théorème

On note K_n la meilleure constante possible dans l'inégalité :

> $\forall X_1, \dots, X_n$ v.a. indep centrée avec $\sum \mathbb{E} X_i^2 = 1$,
> $$\sup_{\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\sum X_i \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq K_n \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_i|^2$$

Remarquons que K_n existe bien (ie est fini) car

$$\sup_x \left| P\left(\sum X_i \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq 2 = 2\left(\sum_{i=1}^{n} |X_i|^2\right)^{3/2} \leq 2\sqrt{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_i|^3$$

Donc $K_n \leq 2\sqrt{n}$

Le but est de montrer que K_n est borné (par 11).

Soit donc $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indep centrés

On pose
$\rightarrow$ $\sigma_i^2 = \mathbb{E} X_i^2$ et on a $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = 1$

$\rightarrow$ $W = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et on a $\mathbb{E} W = 0$, $\mathrm{Var}(W) = 1$

$\rightarrow$ $W_i = \sum_{j \neq i} X_j = W - X_i$ Clé $\boxed{W_i \text{ et } X_i \text{ sont indep}}$

On veut estimer

$$\sup_{w \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}(W \leq w) - \Phi(w) \right|$$

On remarque que pour $f = \mathbb{1}_{]-\infty, w]}$ on a $Nf = \Phi(w)$

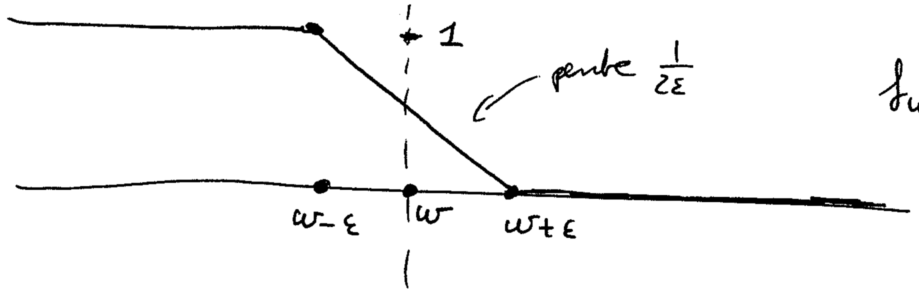
et

$$P(W \leq w) - \Phi(w) = \mathbb{E} f(W) - Nf$$
$$= \mathbb{E}(f - Nf)(W)$$

Pb : $f \in \mathcal{C}_{cb}$

$\rightsquigarrow$ on régularise un peu

Pour $\varepsilon > 0$ et $w \in \mathbb{R}$ on definit $f_{w,\varepsilon}$ par



$f_{w,\varepsilon} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

On a $f_{w,\varepsilon} \in \mathcal{C}_{cb}$ avec $f'_{w,\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{1}_{[w-\varepsilon, w+\varepsilon]}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{w-\varepsilon, w+\varepsilon\}$

On a en particulier $\int_{\mathbb{R}} |f'_{w,\varepsilon}| = 1$ $\rightsquigarrow$ le lemme nous donne un $h_{w,\varepsilon}$ avec $|h_{w,\varepsilon}| \leq \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ et $|h'_{w,\varepsilon}| \leq 1$

Comme $\mathbb{P}(W \leq w) \leq \mathbb{E} f_{w+\varepsilon,\varepsilon}(W)$ et $\phi(w) \geq \phi(w+\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$

et de m. $\mathbb{P}(W \leq w) \geq \mathbb{E} f_{w-\varepsilon,\varepsilon}(W)$ et...

on a :

$$(1) \begin{cases} \mathbb{P}(W \leq w) - \phi(w) \leq \mathbb{E} f_{w+\varepsilon,\varepsilon}(W) - N(f) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \\ \mathbb{P}(W \leq w) - \phi(w) \geq \mathbb{E} f_{w-\varepsilon,\varepsilon}(W) - N(f) - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$$

Dans la suite, f designera $f_{w+\varepsilon,\varepsilon}$ ou $f_{w-\varepsilon,\varepsilon}$. En effet, on va encadrer $\mathbb{E}f - Nf$ pour tout $f = f_{z_0,\varepsilon}$ indep.^{nt} de z_0.

On va montrer :

Lemme

Soit $f = f_{z_0,\varepsilon}$ pour un certain $z_0 \in \mathbb{R}$.
Alors, si on pose $\beta = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_i|^3$ on a

$$\left| \mathbb{E} f(W) - Nf \right| \leq \left(5 + \frac{3}{2} \frac{\beta K_{n-1}}{\varepsilon} \right) \beta$$

Démo Soit φ solution de $S\varphi = f - Nf$ suivant le lemme de Stein
On a : $|\varphi| \leq \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ et $|\varphi'| \leq 1$
On remarque par ailleurs que la fonction $\tilde{\varphi}(x) := x\varphi(x)$
vérifie :

$$\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(y) = \varphi(x)(x-y) + (\varphi(x) - \varphi(y))\, y$$

et donc $$\forall x, y \in \mathbb{R} : \left|\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(y)\right| \leq \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} + |y| \right) |x-y| \qquad (*)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} f(W) - Nf &= \mathbb{E}\left[\varphi'(W) - \varphi(W)\, W \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\varphi'(W)\sigma_i^2 - \varphi(W)\, X_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\varphi'(W)\sigma_i^2 - \underbrace{\varphi(W_i)\, X_i}_{\text{d'espérance nulle car } W_i \perp\!\!\!\perp X_i} - (\varphi(W) - \varphi(W_i))\, X_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\varphi'(W)\sigma_i^2 - \varphi'(W_i + \theta X_i) X_i^2 \right]
\end{aligned}$$

où θ unif sur $[0,1]$ et indep de $\{X_1, \dots, X_n\}$

On écrit $\varphi'(x) = \tilde{\varphi}(x) + f(x) + \underbrace{Nf}_{\text{constante}}$

de sorte que

$$\mathbb{E} f(W) - Nf = \sum_{i=1}^{n} \left[R_i(\tilde{\varphi}) + R_i(f) \right]$$

où pour $g \in \mathcal{C}_{cb}$, $R_i(g) := \mathbb{E}\left[g(W)\sigma_i^2 - g(W_i + \theta X_i) X_i^2 \right]$

On décompose R_i en R_{i1} et R_{i2} :

$$R_i g = R_{i1} g - R_{i2} g$$

où
$$\begin{cases} R_{i1} g = \mathbb{E}\left[(g(W) - g(W_i))\sigma_i^2\right] \\ R_{i2} g = \mathbb{E}\left[(g(W_i + \theta X_i) - g(W_i))\, X_i^2\right] \end{cases}$$

(on a encore utilisé que $W_i \perp\!\!\!\perp X_i$)

On doit donc majorer 4 termes

Pour $R_i(\tilde{\varphi})$

On utilise $(*)$ avec $y = W_i$ et $\begin{cases} x = W \\ x = W_i + \theta X_i \end{cases}$ respectivement pour R_{i1} et R_{i2}

On obtient (puisque $\mathbb{E}|\theta| = \frac{1}{2}$)

$$\left| R_i(\tilde{\varphi}) \right| \leqslant \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} + \mathbb{E}|W_i|\right)\sigma_i^2\, \mathbb{E}|X_i| + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} + \mathbb{E}|W_i|\right)\mathbb{E}|X_i|^3$$

Comme $\mathbb{E}|W_i| \leq (\mathbb{E}|W_i|^2)^{1/2} \leq (\mathbb{E}|W|^2)^{1/2} = 1$, on obtient
et $\sigma_i^2\, \mathbb{E}|X_i| \leq \mathbb{E}|X_i|^3$ (2 fois Hölder)

$$\underline{\left| R_i(\tilde{\varphi}) \right| \leqslant \frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} + 1\right)\mathbb{E}|X_i|^3}$$

Pour $R_i(f)$

Remarquons que comme $0 \leq f \leq 1$ on a $|R_i f| \leq \sigma_i^2$

(pour le voir, on peut écrire $R_i f = \mathbb{E}\left[\underbrace{(f(W) - \tfrac{1}{2})}_{|\cdot| \leq \frac{1}{2}}\sigma_i^2\right] - \mathbb{E}\left[\underbrace{(f(W_i + \theta X_i) - \tfrac{1}{2})}_{|\cdot| \leq \frac{1}{2}} X_i^2\right]$

Par ailleurs, on a, pour $x, y \in \mathbb{R}$, puisque $f = f_{z_0}$

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{1}_{[z_0 - \varepsilon,\ z_0 + \varepsilon]}\left(y + \theta_2(x - y)\right)(x - y)$$

où θ_2 unif sur $[0, 1]$
et indep du reste (de $X_1, \ldots, X_n$ et de θ)

On l'applique à

$$x = W = W_i + X_i,\ y = W_2 \quad \text{et} \quad x = W_i + \theta X_i,\ y = W_i$$

et on prend d'abord l'espérance par rapport à X_j, $j \neq i$, et ensuite par rapport à X_i, θ, θ_2.

Il s'agit d'espérance conditionnelle mais comme on est dans le cas indépendant, c'est aussi tout simplement Fubini pour des fonctions ~~[illegible]~~ sur un produit.

On obtient directement que

$$|R_{i1} f| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{E}_{X_i,\theta_2}\left[\mathbb{P}\left(z_0-\varepsilon \leq W_i+\theta_2 X_i \leq z_0+\varepsilon \,\middle|\, X_i,\theta_2\right) \sigma_i^2 |X_i| \right]$$

$$|R_{i2} f| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{E}_{X_i,\theta,\theta_2}\left[\mathbb{P}\left(z_0-\varepsilon \leq W_i+\theta_2\theta X_i \leq z_0+\varepsilon \,\middle|\, X_i,\theta_2,\theta\right) |X_i|^3 |\theta| \right]$$

On est donc ramené à estimer $\mathbb{P}(a \leq W_i \leq b)$ pour des constantes $a, b \in \mathbb{R}$

La variable $\frac{1}{(\mathbb{E}|W_i|^2)^{1/2}} W_i$ est la somme de $(n-1)$ variables indep redevables du théorème de Berry-Esseen au rang $(n-1)$

On a : (estimation grossière) en notant $\underline{\alpha_i^2 = \mathbb{E}|W_i|^2 = 1-\sigma_i^2}$

$$\mathbb{P}(a \leq W_i \leq b) \leq \frac{b-a}{\alpha_i\sqrt{2\pi}} + 2 \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{W_i}{\alpha_i} \leq x\right) - \Phi(x) \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{\alpha_i\sqrt{2\pi}} + 2K_{n-1}\beta_i$$

où $\begin{cases} \beta_i := \sum_{j\neq i} \frac{\mathbb{E}|X_j|^3}{\alpha_i^3} = \frac{1}{\alpha_i^3}\sum_{j\neq i} \mathbb{E}|X_j|^3 \\ \leq \frac{1}{\alpha_i^3}\beta \qquad \text{où } \beta = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}|X_j|^3 \end{cases}$

Donc

$$|R_i f| \leq \frac{3}{2}\left[\frac{1}{\alpha_i\sqrt{2\pi}} + \frac{2K_{n-1}\beta}{\alpha_i^3 2\varepsilon} \right] \mathbb{E}|X_i|^3$$

$$\leq \frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{K_{n-1}\beta}{\varepsilon} \right] \alpha_i^{-3} \mathbb{E}|X_i|^3$$

donc $|R_i f| \leq \min\left\{ \sigma_i^2 ; \frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{K_{n-1}\beta}{\varepsilon}\right](1-\sigma_i^2)^{-3/2} \mathbb{E}|X_i|^3 \right\}$

On montre <u>Exo</u> : $\min\{a, x(1-\sigma^2)^{-3/2}\} \leq x + \sqrt{\frac{3}{2}}\, a\sigma$ pour $a,\sigma \in [0,1]$

[Repose sur $\sigma \to (1-\sigma^2)^{3/2}$ <u>convexe</u> sur $[0,1]$]

Donc $|R_i f| \leq \frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{K_{n-1}\beta}{\varepsilon}\right]\mathbb{E}|X_i|^3 + \sqrt{\frac{3}{2}}\,\sigma_i^3$

$$\leq \frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{K_{n-1}\beta}{\varepsilon}\right] \mathbb{E}|X_i|^3$$

En mettant ensemble les estimations on trouve

$$\left|\mathbb{E} f(W) - N(f)\right| \leq \left(C + \frac{3}{2}\frac{K_{n-1}\beta}{\varepsilon}\right) \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_i|^3$$

$$\text{où} \quad C = \frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \leq 5$$

■

(fin de la démo du lemme)

$\boxtimes$

En reprenant à partir de (1) on trouve (le lemme est appliqué à $f = f_{w-\varepsilon,\varepsilon}$ et $f = f_{w+\varepsilon,\varepsilon}$)

$$\sup_{w} \left| P(W \leq w) - \Phi(w)\right| \leq \left(5 + \frac{3}{2}\frac{\beta K_{n-1}}{\varepsilon}\right)\beta + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$$

on minimise suivant ε
($\varepsilon = \sqrt{2\pi}\sqrt{K_n}\,\beta$ pour simplifier)

$$\leq 5\beta + 1{,}6\sqrt{K_{n-1}}\,\beta$$

On a donc

$$\underline{K_n \leq 5 + 1{,}6\sqrt{K_{n-1}}}$$

On en déduit facilement que $K_n \leq 11$

$(5 + 1.6\sqrt{11} \leq 11)$

■