Lemme de Sauer-Shelah

Correction

1) • $\mathcal{F}$ = ensemble des parties à au plus $k-1$ éléments dans $[n]$

Alors $|\mathcal{F}| = 1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k-1}$

Si $Y \subset [n]$ est de cardinal k, alors $Y \notin \mathcal{F}(Y)$ donc $|\mathcal{F}(Y)| < 2^k$

• $\underline{k=1}$ Soit $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ avec $\underline{|\mathcal{F}| \geq 2}$

Alors $\exists A, B \subset [n]$ avec $A \neq B$ et $A, B \in \mathcal{F}$

Soit $x \in A \Delta B \neq \emptyset$

Alors $\mathcal{F}(\{x\}) = \{\{x\}, \emptyset\} = 2^{\{x\}}$

2) A un ensemble $A \subset [n]$ est associé un élément $x \in \{-1,1\}^n$

par $x_i = -1$ si $i \notin A$

$x_i = 1$ si $i \in A$

Par ailleurs, à un ensemble $Y \subset [n]$ avec $|Y| = k \geq 1$, on associe un ensemble de coordonnées $I = Y \subset [n]$

Alors, pour $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ on associe $A \subset \Omega_n$

et $\mathcal{F}(Y)$ est alors naturellement associé à $P^I(A)$

3) $B(m) = \{x \in \Omega_n ;\ d(x_0, x) \leq m\} = \{x \in \Omega_n ;\ x$ a au plus m coordonnées égales à $1\}$

a) $|B(m)| = \sum_{k=0}^{m} \{x \in \Omega_n ;\ x$ a k coordonnées égales à $1\}$

$= \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}$

b) Soit $|I| = k$. $P^I(B(k-1)) \subset \{-1,1\}^k$

mais $(\underbrace{1,1,\dots,1}_{k}, y) \notin B(k-1), \underline{\forall y} \in \{-1,1\}^{n-k}$

c) Soit $|I| = m$ qcq. Alors $P^I(B(m)) = \{-1,1\}^m$

4) Supposons que $\forall A \subset \Omega_n$, $|\mathcal{C}(A)| \geq |A| - 1$

Soit $A \subset \Omega_n$ tq $|A| > 1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k-1}$

on a donc $|\mathcal{C}(A)| \geq 1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k-1}$

Donc $\mathcal{C}(A) \not\subset \{ I \subset [n] ;$ I a au plus $k-1$ elts $\}$

$\Rightarrow \exists |I| \geq k$ tq $I \in \mathcal{C}(A)$

(évidemment, si $J \subset I$ et A est I-saturé, alors A est J-saturé donc on peut se ramener à $|I| = k$)

5) a) $n = 1$. Si $|A| = 1$ il n'y a rien à montrer.
Si $|A| = 2$, alors $A = \{-1, 1\} = \Omega_1$ et $I = \{1\}$ sature A.

b) Soit $I \subset \{2, \dots, n\}$ tq $A(1)$ est I-saturé
$\subset \{1, \dots, n\}$

On a :
$\{-1,1\}^{|I|} = P^I(A(1)) \subset P^I(A)$

Donc A est I-saturé. D'où $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}(A)$

De même $\mathcal{C}_{-1} \subset \mathcal{C}(A)$

c) Soit $I \subset \{2, \dots, n\}$ et $\tilde{I} = \{1\} \cup I$

Alors $P^{\tilde{I}}(A) = 1 \times P^I(A(1)) \cup (-1) \times P^I(A(-1))$

Si $P^I(A(1)) = P^I(A(-1)) = \{-1,1\}^I$, alors $P^{\tilde{I}}(A) = \{-1,1\} \times \{-1,1\}^I$
$= \{-1,1\}^{\tilde{I}}$

d) On raisonne par réc. On suppose la prop. vraie pour $n-1$.
Soit $A \subset \Omega_n$. Si $A(1) = \emptyset$ ou $A(-1) = \emptyset$, alors $A \subset \{-1,1\}^{n-1}$
et on applique la prop. pour $n-1$.

Supposons que $A(1) \cap A(-1) \neq \emptyset$

Alors $\mathcal{C}(A) \supset (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_{-1}) \overset{\text{disjoint}}{\dot\cup} \{\{1\} \cup I ; I \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_{-1}\} \overset{\text{disjoint}}{\dot\cup} \{\{1\}\}$ car $A(1) \neq \emptyset$

Donc $|\mathcal{C}(A)| \geq (|\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_{-1}| - |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_{-1}|) + |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_{-1}| + 1$

$\overset{\text{REC}}{\geq} |A(1)| - 1 + |A(-1)| - 1 + 1 = |A| - 1$

Rq : B monotone $\Leftrightarrow$ $\forall x\in B$ $\forall i\in[n]$, $x_i=1 \Rightarrow \tau_i(x)\in B$
[on peut changer toute coordonnée de 1 en -1 en restant dans B]

7) On suppose qu'il existe B monotone avec $|B|=|A|$ tq $\forall I\subset[n]$ $t_I(B)\leq t_I(A)$

En particulier, on a : $\mathcal{C}(B)\subset\mathcal{C}(A)$

Donc $|\mathcal{C}(A)|\geq|\mathcal{C}(B)|$

Considérons l'application $\mathcal{C}(B)\xrightarrow{\alpha}\Omega_n$

$I\xrightarrow{\alpha} \underset{\alpha(I)}{\overset{\shortparallel}{x}}\in\Omega_n$ tq $x_i=1$ si $i\in I$, $x_i=-1$ si $i\notin I$

C'est une injection, évidemment

Par ailleurs $\alpha(\mathcal{C}(B))\subset B$. En effet, pour $I\in\mathcal{C}(B)$, comme B est I-saturé
$\exists y\in B$ tq $P^I(y)=(1,\dots,1)$

Comme B est <u>monotone</u> $\alpha(I)\in B$

De plus, $\forall x\in B\setminus\{\underset{x_0}{(-1,\dots,-1)}\}$, si on note $I_x=\{i\in[n]\,;\,x_i=1\}$
on a, comme B est monotone, que B est I_x-saturé
et que $x=\alpha(I_x)$

Donc $|\mathcal{C}(B)|=|B|-1$
$=|A|-1$ CQFD

8) a) Soit C la i-sym de A

$|C|=|C_i(1)|+|C_i(-1)|=|A_i(1)|+\underbrace{|\tau_i(A_i(1))\setminus A_i(-1)|}_{=|A_i(1)\setminus\tau_i(A_i(-1))|}+|A_i(1)\cap\tau_i(A_i(-1))|$

car τ_i bijection involutive

$=|A_i(1)|+|A_i(-1)|=|A|$

b) Soit $x\in C$ la i-sym de A avec $x_i=1$, ie $x\in A_i(1)$
Comme $\tau_i(A_i(1))\subset C_i(1)\subset C$ on a bien $\tau_i(x)\in C$

c) Pour $i\neq j$ et $\alpha,\beta=\pm1$ on note

$A_{ij}(\alpha,\beta)=\{x\in A\,;\,x_i=\alpha,\ x_j=\beta\}$
$=[A_i(\alpha)]_j(\beta)$

Notons que $A_{ij}(\alpha,\beta)=A_{ji}(\beta,\alpha)$ (*)

On a :

$$[T_i \circ T_j(A)]_{ij}(1,1) = [T_i[(T_j(A))_j(1)]]_i(1) \quad \text{par exemple.}$$

$$= T_i[A_j(1) \cap \tau_j A_j(-1)]_i(1) \qquad C = T_j(A)$$

$$= A_{ji}(1,1) \cap \tau_j A_{ji}(-1,1) \cap \tau_i A_{ji}(1,-1) \cap \tau_i\tau_j A_{ji}(-1,-1)$$

on conclut en utilisant (*) et $\tau_i \circ \tau_j = \tau_j \circ \tau_i$ que

$$[T_i \circ T_j(A)]_{ij}(1,1) = [T_j \circ T_i(A)]_{ij}(1,1)$$

on fait de même pour les 3 autres ij-sections ....

Montrons que $B = T_n \circ \dots \circ T_1(A)$ est temps monotone.

Soit $x \in B$ et $i \in [n]$ tq $x_i = 1$.

on a : $x \in T_i C$ où $C = \left(\prod_{j \neq i} T_j\right)(A)$

D'après le b) $\tau_i(x) \in T_i(C) = B$ d'après la commutation

CQFD

9) Soit $S \subset [n]$, $i \notin S$ et C la i-sym de A.

Rq : si $i \notin S$ on a $\forall A \subset \Omega_n$, $\begin{cases} P^S(A) = P^S(A_i(1)) \cup P^S(A_i(-1)) \\ \text{et } P^S(A) = P^S(\tau_i(A)) \end{cases}$

On a : $P^S(C) = P^S(A_i(1) \cap \tau_i A_i(-1)) + \underbrace{P^S(A_i(-1) \cup \tau_i(A_i(1)))}_{= P^S(\tau_i A_i(-1) \cup A_i(1))}$

$$= P^S(A_i(1) \cup \tau_i A_i(-1))$$

$$= P^S(A_i(1)) \cup P^S(\tau_i(A_i(-1)))$$

$$= P^S(A)$$

10) $i = 1$ $S = \{1, -, k\} = \{1\} \cup S'$ $S' = \{2, -, k\}$

$C = 1$-sym de A.

$P^S(C) = \{y \in P^S(C) \; ; \; y_1 = 1\} \,\dot{\cup}\, \{y \in P^S(C) ; y_1 = -1\}$

Pour $x \in \Omega_n$ on écrit $x = (x_1, x_{S'}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$

de sorte que $\forall y \in P^S(A) \Rightarrow \exists x \in A$ tq $y = (x_1, x_{S'})$

Donc pour C, on a par def

$$P^S(C) = \{(1, x_{S'})\ ;\ x \in C_1(1)\} \cup \{(-1, x_{S'})\ ;\ x \in C_1(-1)\}$$

$$= \left\{(1, x_{S'})\ ;\ \begin{array}{l} x \in A,\ x_1 = 1 \\ \tau_1(x) \in A \end{array}\right\} \cup \underbrace{\{(-1, x_{S'})\ ;\ x \in A, x_1 = -1\}}_{\{\forall y \in P^S(A),\ y_1 = -1\}} \cup \left\{(-1, x_{S'})\ ;\ \begin{array}{l} x \notin A \\ x_1 = -1 \\ \tau_1(x) \in A \end{array}\right\}$$

on enlève les répétitions.

$$= \left\{(1, x_{S'})\ ;\ \begin{array}{l} x \in A,\ x_1 = 1 \\ \tau_1(x) \in A \end{array}\right\} \dot\cup \{(-1, x_{S'}) \in P^S(A)\} \dot\cup \left\{(-1, x_{S'})\ ;\ \begin{array}{l} x \notin A \quad x_1 = -1 \\ \tau_1(x) \in A \\ (1, x_{S'}) \notin P^S(A) \end{array}\right\}$$

~~on a donc~~

b) On remarque que

$$\left|\left\{(-1, x_{S'})\ ;\ \begin{array}{l} x \notin A,\ x_1 = -1 \\ \tau_1(x) \in A \\ (1, x_{S'}) \notin P^S(A) \end{array}\right\}\right| \leq \left|\left\{(-1, x_{S'})\ ;\ \begin{array}{l} x \notin A \quad x_1 = -1 \\ \tau_1(x) \in A \end{array}\right\}\right|$$

$$\overset{\text{(bijection)}}{=} \left|\left\{(1, x_{S'})\ ;\ \begin{array}{l} \tau_1(x) \notin A \quad x_1 = 1 \\ x \in A \end{array}\right\}\right|$$

on en déduit que

$$|P^S(C)| \leq |\{(1, x_{S'}),\ x \in A\ x_1 = 1\}| + |\{(-1, x_{S'})\ ;\ x \in A,\ x_1 = -1\}|$$
$$= |P^S(A)|$$

11) D'après le 9) et le 10)b) on a $\forall S \subset [n]$, $\forall i \in [n]$ $|P^S C_i| \leq |P^S A|$ pour C i-sym de A ie $t_S(C) \leq t_S(A)$

Si on prend $B = T_n \circ \cdots \circ T_1(A)$, on a (par réc). $t_S(B) \leq t_S(A)$

Donc $\exists B$ monotone avec $|B| = |A|$ et $t_S(B) \leq t_S(A)$ $\forall S \subset [n]$