Exercices

Séance du vendredi 11/12/09

Exo 1

1) La matrice A étant orthogonale, ses lignes forment une base orthonormée, et en particulier : $\forall i \leq n$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$

Par l'inégalité sous-gaussienne pour les Bernoulli on a

$$\forall r \geq 0, \quad \mathbb{P}\left(\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \varepsilon_j \right| \geq r \right) \leq 2 e^{-r^2/8}$$

2) Si on note $a_{ij} = e_i \cdot v_j$ $\quad$ (e_i) base canonique de ℓ_2^n

alors $A = (a_{ij})$ est une matrice orthogonale.

Pour tout $r > 0$ on a :

$$\mathbb{P}\left(\left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j v_j \right\|_\infty \geq r \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\exists i \leq n, \left| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \underbrace{v_j \cdot e_i}_{a_{ij}} \right| \geq r \right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\left| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j v_j \cdot e_i \right| \geq r \right)$$

$$\leq 2n\, e^{-r^2/8}$$

d'après le 1)

Pour $r := 6\sqrt{\log(n)} \geq \sqrt{8 \log(n^2)}$

on a donc : $\mathbb{P}\left(\left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j v_j \right\|_\infty \geq 6\sqrt{\log(n)} \right) \leq \frac{1}{e} < 1$

~~L'événement~~ donc $\mathbb{P}\left(\left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j v_j \right\|_\infty \leq 6\sqrt{\log(n)} \right) \geq 1 - \frac{1}{e} > 0$

cet événement est donc non vide, i.e. $\exists$

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tq $\left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j v_j \right\|_\infty \leq 6\sqrt{\log(n)}$

Exo 2

Un graphe sur $\{1, \dots, n\}$ est la donnée d'un ensemble $E(G) \subset A := \{\{i,j\}, i \neq j\}$ $\quad |A| = \frac{n(n-1)}{2}$

1) Le modèle de graphe aléatoire est le suivant : On regarde $\{i,j\}, i \neq j$ et on décide avec proba $\frac{1}{2}$ de le mettre comme arête, et avec proba $\frac{1}{2}$ de ne pas le mettre. On fait cela de manière indépendante pour chaque $\{i,j\}$ $i \neq j$. (i.e : c'est un élément de $\{-1,1\}^A$)

Ainsi, tous les graphes sont équiprobables : si G est le graphe aléatoire obtenu et si G_* est un graphe donné :

$$\mathbb{P}(G_n = G_*) = \frac{1}{\text{nb total de graphes possibles}} = \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Par ailleurs

$$\sigma_{n^2}\left(\{x \in \{-1,1\}^{n^2} ;\ G(x) = G_*\}\right)$$

i.e. on fixe $\frac{n(n-1)}{2}$ coordonnées

$$= \sigma_{n^2}\left(\{x \in \{-1,1\}^{n^2} ;\ \forall j<i,\ \begin{cases} x_{ij} = 1 & \text{si } \{i,j\} \text{ arête} \\ x_{ij} = -1 & \text{sinon} \end{cases}\}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n^2}} \times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

$\boxed{\text{+ simple}}$: les $\{x_{ij}, j<i\}$ sont des variables indep. avec $\mathbb{P}(x_{ij} = 1) = \mathbb{P}(x_{ij} = -1) = \frac{1}{2}$ donc ...

2) Soit x et $y \in \{-1,1\}^{n^2}$ ne varient que de la coordonnée $(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$

si $i \leq j$, alors $G(x) = G(y)$ et donc $\chi_{G(x)} = \chi_{G(y)}$

si $j < i$, alors $G(x)$ et $G(y)$ diffèrent exactement d'une arête.

Donc $|\chi_{G(x)} - \chi_{G(y)}| \leq 1$

[au pire, une couleur en plus suffit pour passer d'un coloriage de $G(x)$ à un coloriage de $G(y)$, et récip.).

Par conséquent $x \longrightarrow \chi_{G(x)}$ est 1-lip : $\forall x, y \in \{-1,1\}^{n^2}$ ③

$$|\chi_{G(x)} - \chi_{G(y)}| \leq \sum_{i,j} \mathbb{1}_{x_{ij} \neq y_{ij}}$$

Par la concentration sur Ω_{n^2} on a :

$$\mathbb{P}(|\chi_{G_n} - \mathbb{E}\chi_{G_n}| \geq t) \leq 2 e^{-t^2/2n^2}$$

car nous sommes sur Ω_{n^2}

3) G^i est obtenu en enlevant à G les arête reliant i à un sommet k avec $k<i$.

C'est un sous-graphe de G donc $\underline{\chi_{G^i} \leq \chi_G}$

On ~~colorie~~ les sommets $\{1, \dots, n\}$ de manière à obtenir un coloriage de G^i. Je prends une nouvelle couleur et je colorie i avec. Alors ce coloriage des sommets donne un coloriage de G. En effet, seules les arêtes contenant i doivent être étudiées, et i a une couleur différente de toutes les autres arêtes.

On a donc

$$\underline{\chi_G \leq \chi_{G^i} + 1}$$

4) Comment ~~comprendre~~ $G(x)^i$

Les ~~arêtes~~ contenant i sont données par les $\{x_{ij}, j<i\}$ et $\{x_{ki}, i<k\}$

Pour obtenir $G(x)^i$, on regarde seulement les $\{x_{ij}, j<i\}$

Si x et y ne diffèrent que de la i-ème "coordonnée", cela veut dire que seuls les $\{x_{ij}, j \leq n\}$ et les $\{y_{ij}; j\leq n\}$ diffèrent. Mais seul le comportement des $\{x_{ij}, j<i\}$ et « importe

Par conséquent, si x et y ne diffèrent que de la coordonnée i, alors

$$G(x)^i = G(y)^i$$

[Rappel : $x, y \in (\Omega_n)^n$
$x_i, y_i \in \Omega_n$
$x_i = (x_{ij}, j \leq n)$
$y_i = (y_{ij}, j \leq n)$]

Donc $\quad \chi_{G(x)} \leq \chi_{G(x)^i} + 1 = \chi_{G(y)^i} + 1 \leq \chi_{G(y)} + 1$

et de même $\quad \chi_{G(y)} \leq \chi_{G(x)} + 1$

Donc $$|\chi_{G(x)} - \chi_{G(y)}| \leq 1$$

5) On va utiliser la concentration produit sur $(\Omega_n)^n$ avec la proba produit $(\sigma_n)^{\otimes n} = \mathbb{P}$ $(= \sigma_{n^2})$
La fonction $x \longrightarrow \chi_{G(x)}$ est tq si $x = (x_1, -, x_n)$ et $y = (y_1, -, y_n)$ ne diffèrent que d'une coord., alors $|\chi_{G(x)} - \chi_{G(y)}| \leq 1$

Donc

$$\mathbb{P}\{x \in \Omega_n^n \; ; \; |\chi_{G(x)} - \int \chi_{G(y)} dy| \geq r\} \leq 2e^{-r^2/2n}$$

$\mathbb{P} = \sigma_{n^2}$

$c^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$

Donc $\quad \mathbb{P}(|\chi_G - \mathbb{E}\chi_G| \geq r) \leq 2e^{-r^2/2n}$

Exo 4

Pour $G = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$\forall p \geq 1,$ $$\|G\|_{\ell_\infty^n} \leq \|G\|_{\ell_\infty^p}$$ ~~avec~~

Donc
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|G\|_{\ell_\infty^n} &\leq \mathbb{E}\|G\|_{\ell_\infty^p} \\
&\leq \left(\mathbb{E}\|G\|_{\ell_\infty^p}^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\mathbb{E}\sum_{i=1}^n |g_i|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}|g_i|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^n (C\sqrt{p}\,\underbrace{\mathbb{E}|g_i|^2}_{=1})^p\Big)^{1/p} \\
&= n^{1/p} C\sqrt{p}
\end{aligned}$$

Pour $p = \log(n)$
$$\mathbb{E}\|G\|_{\ell_\infty^n} \leq C\sqrt{\log(n)}$$

Exo 5

1) La loi de $\varepsilon_1|g_1|$ est la mesure $\sigma_1 \otimes \gamma_1$ sur $\{-1,1\}\times\mathbb{R}$ car ε_1 et $|g_1|$ sont indep, donc pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} f(\varepsilon_1|g_1|) &= \frac{1}{2}\left[\int f(|x|)\,d\gamma_n(x) + \int f(-|x|)\,d\gamma_n(x)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2\int_0^\infty f(t)\,d\gamma(t) + 2\int_0^\infty f(-t)\,d\gamma(t)\right] \\
&= \int_0^\infty f(t)\,d\gamma(t)
\end{aligned}$$

Donc $\varepsilon_1|g_1|$ a la loi d'une variable gaussienne standard

2) Les variables

$$\varepsilon_1|g_1|,\ \varepsilon_2|g_2|,\ \dots,\ \varepsilon_n|g_n| \quad \text{sont des}$$

variables gaussiennes standard indep.

Donc $\forall f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_g f(g_1, \dots, g_n) = \mathbb{E}_{\varepsilon, g} f(\varepsilon_1|g_1|, \dots, \varepsilon_n|g_n|)$$

Par conséquent, pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}_g \left| \sum a_i g_i \right|^p \right)^{1/p} &= \left(\mathbb{E}_{\varepsilon, g} \left| \sum a_i |g_i| \varepsilon_i \right|^p \right)^{1/p} \\
&= \left(\mathbb{E}_\varepsilon \left(\mathbb{E}_g \left| \sum a_i |g_i| \varepsilon_i \right|^p \right) \right)^{1/p} \\
\text{Jensen avec } \mathbb{E}_g \quad &\geq \left(\mathbb{E}_\varepsilon \left| \underbrace{\mathbb{E}_g \left(\sum a_i |g_i| \varepsilon_i \right)}_{= \sum a_i \underbrace{\mathbb{E}_g |g_i|}_{= \sqrt{\frac{2}{\pi}}} \varepsilon_i} \right|^p \right)^{1/p} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\mathbb{E}_\varepsilon \left| \sum a_i \varepsilon_i \right|^p \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

On peut passer de Khintchine gaussien à Khintchine Bernoulli en remarquant que

$$\left\| \sum a_i \varepsilon_i \right\|_{L^2(\mathbb{P})}^2 = \sum a_i^2 = \left\| \sum a_i g_i \right\|_{L^2(\mathbb{P})}^2$$

Exo 5

1) Il faut supposer que

(*) $\underline{\underline{\forall \lambda \in \mathbb{R}}}$, $\int e^{\lambda f} d\mu \leq C e^{\varepsilon^2 \lambda^2 / 2}$

(ou bien que $\forall \lambda \geq 0$, $\int e^{\lambda |f|} \leq C e^{\varepsilon^2 \lambda}$)

Alors, on utilise que $\forall t \in \mathbb{R}$ $\int_{\mathbb{R}} e^{t\lambda} d\gamma_1(\lambda) = e^{t^2/2}$

Donc, pour $c>0$ qui sera fixé plus loin

$$\int_X e^{\left(\frac{f}{c}\right)^2} d\mu(x) = \int_X \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{f(x) \times \sqrt{2}}{c} \lambda} d\gamma_1(\lambda)\, d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_X \quad ''$$

$$\overset{\text{d'après } (*)}{\leq} C \int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon^2 \lambda^2 / c^2} d\gamma_1(\lambda)$$

$$= C \int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon \lambda^2 / c^2} e^{-\lambda^2/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{2\pi}}$$

on peut choisir c (en fonction de C et ε) tq ≤ 2

[Calcul ...]

2)

Soit $c>0$ tq $\int e^{\left(\frac{f}{c}\right)^2} d\mu \leq 2$ ($c = \|f\|_{\psi_2}$)

On utilise que pour $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$

$$\lambda f(x) \leq \frac{1}{c^2} f(x)^2 + c^2 \lambda^2 / 4 .$$

on a donc $\int e^{\lambda f} d\mu \leq 2 e^{-c^2 \lambda^2 / 4}$