# Exercices supplémentaires

*Voici un pot-pourri d'exercices pour la séance du vendredi 11 décembre. Certains exercices sont des applications directes du cours. Il vaut mieux regarder les exercices dans l'ordre donné ci-dessous.*

**Exercice 1** 1. *On se donne une matrice orthogonale $n \times n$, $A = (a_{i,j})_{i,j \leq n}$. Montrer que si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont des variables de Bernoulli $\pm 1$ indépendantes (définie sur un certain $\Omega, \mathbb{P})$), alors, pour tout $i \leq n$,*

$$\forall r \geq 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left\{\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_j\Big| \geq r\right\}\right) \leq 2e^{-r^2/2}.$$

2. *Montrer que pour tout $n \geq 2$ et toute base orthornormée $v_1, \ldots, v_n$ de $\ell_2^n$ on peut trouver un certain choix de signes $\varepsilon_1 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$ tel que*

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \, v_j\right\|_{\ell_\infty^n} \leq c\sqrt{\log(n)}$$

*(où $c > 0$ est une constante numérique).*

**Exercice 2 (Nombre Chromatique aléatoire)** *Soit $G = (V, E)$ un graphe sur $n \geq 1$ sommets $V = \{1, \ldots, n\}$ (c'est-à-dire la donnée d'un sous-ensemble $E$ de partie à 2 éléments de $\{1, \ldots n\}$.). On écrira $e_{i,j} \in G$ si $\{i, j\}$ est une arête. Un $N$-coloriage est une application $\varphi : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, N\}$ tel que*

$$e_{i,j} \in G \Longrightarrow \varphi(i) \neq \varphi(j).$$

*Le nombre chromatique de $G$, noté $\chi(G)$, est le plus petit entier $N$ tel qu'il existe un $N$-coloriage de $G$.*

*Le modèle classique de graphe aléatoire $G_n$ est le suivant : Étant donné $n$ sommets notés $\{1, \ldots, n\}$ pour chaque $\{i, j\}$ $(i \neq j)$ on décide indépendamment avec probabilité $1/2$ de le prendre comme arête. On va représenter ce modèle de la manière suivante. On travaille sur $\Omega_n^n$. Un élément $x \in \Omega_n^n$ s'écrit $x = (x_i)$ avec $x_i \in \Omega_n$ pour $i \leq n$. On peut aussi faire l'identification $\Omega_n^n = \Omega_{n^2}$ et écrire $x = (x_{ij})$ avec la convention $x_{ij} = (x_i)_j$, c'est-à-dire $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in}) \in \Omega_n$. Pour $x \in \Omega_n^n$, on considère le graphe $G(x)$ sur $n$ sommets définit comme suit :*

$$e_{i,j} \in G(x) \quad \text{si} \quad \big(\, j < i \quad \text{et} \quad x_{ij} = 1\big)$$

*et on ignore donc les $x_{ij}$ avec $j \geq i$ (i.e. la fonction $G(x)$ ne dépend que des coordonnées $x_{ij} = (x_i)_j$ avec $j < i$.*

1. *Montrer (se persuader) que la loi $G_n$ est bien la loi de $G(x)$ sous $\sigma_{n^2} = \sigma_n^{\otimes n}$.*
2. *Montrer que $x \longrightarrow G(x)$ est 1-lipschitzienne par rapport à la distance de Hamming sur $\Omega_{n^2}$ et que pour le graphe aléatoire $G_n$, on a*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}\left(\left\{\left|\chi_{G_n} - \mathbb{E}\chi_{G_n}\right| \geq t\right\}\right) \leq 2e^{-t^2/2n^2}.$$

   Le but de l'exercice est d'améliorer sensiblement cette estimée en changeant de métrique.

3. *Pour $x \in \Omega_n^n$ donné, soit $G^i(x)$ le graphe obtenu en enlevant à $G(x)$ toutes les arêtes $e_{ik}$ avec $k < i$. Montrer que*

$$\chi_{G^i(x)} \leq \chi_{G(x)} \quad \text{et} \quad \chi_{G(x)} \leq \chi_{G^i(x)} + 1.$$

4. *Montrer que si $x, y \in \Omega_n^n$ ne diffèrent que d'une de leur coordonnée $i \leq n$, alors*

$$|\chi_{G(x)} - \chi_{G(y)}| \leq 1.$$

5. *En déduire que, pour le graphe aléatoire $G_n$, on a*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}\left(\left\{\left|\chi_{G_n} - \mathbb{E}\chi_{G_n}\right| \geq t\right\}\right) \leq 2e^{-t^2/2n}.$$

**Exercice 3** *Soit $\{g_1, \ldots, g_n\}$ des variables aléatoires gaussiennes standards (pas nécessairement indépendantes). En utilisant le caractère $\psi_2$ de $g_i$ (c'est-à-dire que de $t \to t$ est dans $L_{\psi_2}(\gamma_1)$ avec une norme $\psi_2$ contrôlée par la norme $L_2$) et le fait que $\ell_\infty^n$ est universellement équivalent à une certaine norme $\ell_p^n$, retrouver que*

$$\mathbb{E} \sup_{1 \leq i \leq n} |g_i| \leq C\sqrt{\log n}$$

*pour une certaine constante numérique $C > 0$.*

**Exercice 4** *Soit $g_1, \ldots, g_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ des variables indépendantes (définies sur un certain espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$) avec pour $i \leq n$, $g_i$ gaussienne standard et $\varepsilon_i$ Bernouilli $\pm 1$.*

1. *Montrer que $\varepsilon_1 |g_1|$ est encore une variable gaussienne standard.*
2. *Montrer que pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ on a, pour tout $p \geq 1$*

$$\|\sum_{i=1}^n g_i a_i\|_{L_p(\Omega,\mathbb{P})} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\|_{L_p(\Omega,\mathbb{P})},$$

   *et expliquer comment l'inégalité de Khintchine pour les Bernouilli peut se déduire de celle pour les variables gaussiennes.*

**Exercice 5** *Soit $(X, \mu)$ un espace de probabilité.*

1. *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $c_0, C > 0$. On suppose qu'on a l'inégalité gaussienne suivante :*

$$\forall \lambda \geq 0, \qquad \int e^{\lambda f}\, d\mu \leq C e^{c_0\, \lambda^2/2}.$$

   *Montrer que $f$ est $\psi_2(\mu)$ et que*

$$\|f\|_{\psi_2(\mu)} \leq (4C + 1)^{1/2}\, c_0.$$

2. *On s'intéresse à la réciproque. Montrer que si $f$ est $\psi_2(\mu)$, alors, en notant $c_0 := \|f\|_{\psi_2(\mu)}$ on a*

$$\forall \lambda \geq 0, \qquad \int e^{\lambda f}\, d\mu \leq C e^{c_0\, \lambda^2/2}$$

*où la constante $C > 0$ dépend seulement de $c_0$.*

**Exercice 6 (Méthode de Herbst (Résultat du cours))** *Soit $\mu$ une probabilité sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant $LSI(\rho_0)$, c'est-à-dire : pour toute fonction $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $g^2$ a une entropie finie et $g$ de classe $C^1$ (ou localement lipschitzienne),*

$$\mathrm{Ent}_\mu(g^2) \leq \frac{2}{\rho_0} \int |\nabla g|^2\, d\mu.$$

*Soit $f : \mathbb{R}^n$ une fonction 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ et, pour $\lambda \geq 0$,*

$$H(\lambda) = \int e^{\lambda \left[f - \int f\, d\mu\right]}\, d\mu.$$

1. *Montrer, en appliquant $LSI(\rho_0)$ à une fonction bien choisie que, pour tout $\lambda \geq 0$*

$$\lambda H'(\lambda) - H(\lambda) \log(H(\lambda)) \leq \frac{1}{2\rho_0} \lambda^2 H(\lambda).$$

2. *Montrer que lorsque $\lambda \to 0$, on a $\frac{1}{\lambda} \log H(\lambda) \to \int f\, d\mu$.*
3. *Montrer que,*

$$H(\lambda) \leq e^{\lambda^2/2\rho_0}.$$

*et que $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, \mu)$ a une concentration gaussienne que l'on précisera.*

**Exercice 7** *Soit $(X, \mu)$ un espace de probabilité et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que $f$ admet une médiane.*