Le lemme de Sauer-Shelah

I] Généralités

On désigne par 2^A l'ensemble des parties d'un ensemble A.

Pour $n \geq 1$, on note $[n] = \{1, \dots, n\}$

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de parties de $\{1, \dots, n\} = [n]$ (ie : $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$)

Pour $Y \subset [n]$ on note

$$\mathcal{F}(Y) = \{ Y \cap F \, ; \, F \in \mathcal{F} \} \subset 2^Y$$

(↳ "trace" ou "projection" de $\mathcal{F}$ sur Y)

On dit que $\mathcal{F}$ <u>brise</u> ou <u>éclate</u> (<u>shatters</u> in english) si

$$\mathcal{F}(Y) = 2^Y$$

<u>theo 1</u> (Lemme de Sauer-Shelah)

Soit $n \geq k \geq 1$. Si $\mathcal{F}$ est un ensemble de parties de $[n]$ tq

$$|\mathcal{F}| > 1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k-1}$$

alors il existe $Y \subset [n]$ avec $|Y| = k$ tq $\mathcal{F}$ brise Y.

1) • Construire un ensemble simple $\mathcal{F}$ avec

$$|\mathcal{F}| = 1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k-1}$$

tel que $\mathcal{F}$ n'éclate <u>aucune</u> partie $Y \subset [n]$ de cardinal k.

• Démontrer le théorème pour $k = 1$.

II] Reformulation

On travaille sur $\mathbb{R}^n$. On se donne un ensemble I de k coordonnées, càd

$$I \subset [n] \quad \text{avec} \quad |I| = k.$$

On écrit $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

et on introduit alors

$$p^I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
$$x \longrightarrow p^I(x) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$$

Ainsi p^I est simplement la projection sur les coordonnées de I.

2) Montrer que le théo. de Sauer-Shelah est équivalent au

<u>théo 2</u> : Soit $n \geq k \geq 1$. Si $A \subset \{-1,1\}^n =: \Omega_n$ est tq
$$|A| > 1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k-1}$$
alors il existe un choix de k coordonnées $I \subset [n]$ tq
$$p^I(A) = \{-1,1\}^k \subset \mathbb{R}^k$$

Si $p^I(A) = \{-1,1\}^{|I|}$, on dit que A est <u>I-saturé</u>
$A \subset \{-1,1\}^n$

3) [Reformulation de l'exemple du 1)] On note
$$x_0 = (-1,-1,\dots,-1) \in \Omega_n$$
et pour $m \leq n$, on introduit la boule de Hamming
$$B(m) := B(x_0, m) := \{x \in \Omega_n ; \ d(x_0, x) \leq m\}$$

(a) Calculer $|B(m)|$

(b) Montrer que pour tout $I \subset [n]$ avec $|I| = k$ on a
$$p^I(B(k-1)) \neq \{-1,1\}^k$$

(c) Vérifiez le théo dans le cas où $A = B(m)$.

IV) <u>Extension et preuve</u>

4) Montrer que le théo 2 est une conséquence du résultat suivant

<u>théo 3</u> : Etant donné $A \subset \{-1,1\}^n$, on note
$$\mathcal{C}(A) := \{I \subset [n] \text{ tq } A \text{ est } I\text{-saturé}\}$$
Pour tout $A \subset \{-1,1\}^n$, on a $|\mathcal{C}(A)| \geq |A| - 1$

5) Démonstration du théo 3

5.a) Cas $n = 1$?

Dans la suite, on se donne $n \geq 2$

Pour $A \subset \Omega_n$, on introduit les "sections" :

$$A(1) = \{ z = (z_2, \dots, z_n) \in \{-1,1\}^{n-1} ; (1, z) \in A \} \subset \{-1,1\}^{\{2,\dots,n\}}$$
$$A(-1) = \{ z = (z_2, \dots, z_n) \in \{-1,1\}^{n-1} ; (-1, z) \in A \} \quad "$$

et $\mathcal{C}_1 = \{ I \subset \{2, \dots, n\} ;$ $A(1)$ est I-saturé $\}$
$\mathcal{C}_{-1} = \{ I \subset \{2, \dots, n\} ;$ $A(1)$ est I-saturé $\}$

5.b) Montrer que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}_{-1} \subset \mathcal{C}(A)$

5.c) Montrer que si $I \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_{-1}$, alors A est $I \cup \{+1\}$ - saturé

5.d) Conclure

IV/ Ensembles monotones du cube et Sauer-Shelah

On introduit l'ordre (partiel) suivant sur Ω_n : pour $x, y \in \Omega_n$

$x \preceq y$ si $\forall i \leq n,\ x_i \leq y_i$

Un ensemble $A \subset \Omega_n$ est dit <u>monotone</u> (ou héréditaire) si

$(x \in A$ et $y \preceq x) \Rightarrow y \in A$

Ainsi A est monotone si lorsque qu'on change un coordonnée 1 en -1 on reste dans A.

6) Montrer que les boules de Hamming sont monotones

Pour $I \subset [n]$, on note $t_I(A) := |P^I(A)|$

7) Retrouver les théos. 2 et 3 à partir du :

<u>théo 4</u> : Pour tout $A \subset \Omega_n$, il existe $B \subset \Omega_n$ monotone avec $|B| = |A|$ et tel que $\forall I \subset [n] : t_I(B) \leq t_I(A)$

Dans la suite, on va démontrer le théo 4.

On définit les sections pour tout $i \in [n]$: pour $A \subset \Omega_n$ on pose

$$A_i(1) = \{x \in A \,;\, x_i = 1\} \qquad A = A_i(1) \,\dot\cup\, A_i(-1)$$
$$A_i(-1) = \{x \in A \,;\, x_i = -1\}$$

On identifie $A_i(1)$ et $\{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \{-1,1\}^{n-1} \,;\, (x_1, \dots, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \in A\}$

Idem pour $A_i(-1)$.

On considère la transformation C_i (compression de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée) sur les ensembles de Ω_n comme suit :

Pour $A \subset \Omega_n$ et pour chaque $x \in A$

→ si $x_i = -1$: on ne fait rien

→ si $x_i = 1$ alors

→ si $T_i(x) \in A$, on ne fait rien

→ si $T_i(x) \notin A$, on remplace x par $T_i(x)$

Plus formellement, l'ensemble $C = C_i(A)$ est défini par

$$C_i(-1) = A_i(-1) \cup T_i(A_i(1)) = A_i(-1) \,\dot\cup\, \left(T_i(A_i(1)) \setminus A_i(-1)\right)$$
$$C_i(1) = A_i(1) \cap T_i(A_i(-1))$$

8) Quelques propriétés de C_i

a) Montrer que $|C_i(A)| = |A|$

b) Montrer que si $x \in C_i(A)$ et $x_i = 1$, alors $T_i(x) \in C_i(A)$

c) Montrer que $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$ et que $T_n \circ \dots \circ T_1(A)$ est un ensemble monotone

9) Montrer que si $S \subset [n]$ et $i \notin S$, alors $P^S(C_i(A)) = P^S(A)$.

10) Soit $i = 1$, $S = \{1, \dots, k\} = \{1\} \cup S'$, $S' = \{2, \dots, k\}$ (Pour simplifier les notations). On note $C = C_1(A)$ le 1-sym. de A.

a) Montrer, en notant $x_{S'} = (x_2, \dots, x_k)$ tq

$$P^S(C) = \{(1, x_{S'}) \,;\, x \in A, x_1 = 1, T_1(x) \in A\} \,\dot\cup\, \{(-1, x_{S'}) \,;\, x \in A, x_1 = -1\} \,\dot\cup\, \{(-1, x_{S'}) \,;\, x \notin A, x_1 = -1, T_1(x) \in A, (1, x_{S'}) \notin P^S A\}$$

b) En déduire que $|P^S C| \le |P^S A|$

11) Montrer que $\forall S \subset [n]$, $\forall i \le n$, $t_S(C_i(A)) \le t_S(A)$ et conclure.