Exercices sur le cube discret $\Omega_n = \{-1,1\}^n$

Exercice 1. On note $P_t = e^{t\Delta}$ sur Ω_n.

1. Par décomposition de Fourier-Walsh, montrer que pour $f : \Omega_n \to \mathbb{R}$ on a
$$\int \left(f - \int f\, d\sigma_n\right)^2 d\sigma_n \le \frac{1}{2}\int |\nabla f|^2\, d\sigma_n. \tag{1}$$
Montrer que l'inégalité (1) implique que pour $t > 0$ et $f : \Omega_n \to \mathbb{R}$ on a :
$$\left\| P_t f - \int f\, d\sigma_n \right\|^2_{L^2(\sigma_n)} \le e^{-4t} \left\| f - \int f\, d\sigma_n \right\|^2_{L^2(\sigma_n)} \tag{2}$$

2. Montrer que l'inégalité (2) peut s'écrire sous la forme
$$\left\| f - \int f\, d\sigma_n \right\|^2_{L^2(\sigma_n)} \le \frac{1}{1-e^{-4t}} \left[\|f\|^2_{L^2(\sigma_n)} - \|P_t f\|^2_{L^2(\sigma_n)} \right]$$

3. Pour $t > 0$ fixé, en introduisant $\alpha(s) = P_s\big((P_{t-s}f)^2\big)$ pour $s \in [0,t]$ montrer que, sur Ω_n,
$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 = 2\int_0^t P_s\big(|\nabla P_{t-s} f|^2\big)\, ds \le 2t\, P_t\big(|\nabla f|^2\big).$$

4. En déduire que, si on admet l'inégalité (2), alors on retrouve (1).

Exercice 2. (ℓ_2-distorsion du cube $\{-1,1\}^n$: Théorème de Enflo)
Pour un espace métrique (M,d) on note $c_2(M) = c_2(M,d)$ l'infimum des $D > 0$ tel qu'il existe un D-plongement de (M,d) dans un espace euclidien (c'est-à-dire dans ℓ_2), i.e. $c_2(M)$ est la plus petite constante $D > 0$ telle qu'il existe un espace euclidien $(E, \|\cdot\|)$ et une une application injective lipschitzienne $F : M \to E$ telle que
$$\|F\|_{\text{lip}} \cdot \|F^{-1}_{|F(M)}\|_{\text{lip}} \le D.$$
Un résultat de Bourgain assure que, pour tout espace métrique (M,d) on a $c_2(M) \le C \log|M|$. Le fait que ce résultat soit, pour tout cardinal, optimal est délicat (l'exemple est difficile). On va s'en approcher en montrant que, quel que soit le cardinal k, on peut trouver un espace métrique (M,d) avec $|M| = k$ tel que $c_2(M) \ge c\sqrt{\log k}$. Ici $c, C > 0$ sont des constantes numériques.

1. Montrer que pour tout $f : \Omega_n \to \mathbb{R}$ on a
$$\int |f(x) - f(-x)|^2\, d\sigma_n \le 4\int |\nabla f|^2\, d\sigma_n.$$

2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un <u>espace euclidien</u>. Montrer que pour tout $F : \Omega_n \to E$ on a

$$\int \|F(x) - F(-x)\|^2 \, d\sigma_n \leq 4 \int \|\nabla F\|^2 \, d\sigma_n$$

où, pour $x \in \Omega_n$, on a posé : $|\nabla F|^2(x) := \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|F(x) - F(\tau_i(x)\|^2$.

3. On muni Ω_n de la métrique de Hamming, notée d. Montrer que

$$c_2(\Omega_n, d) \geq c\sqrt{n} = c\sqrt{\log |\Omega_n|}$$

pour une certaine constante numérique $c > 0$.

Exercice 3. (Inégalité isopérimétrique)
Sur Ω_n, il y a plusieurs manières de compter la mesure du bord d'un ensemble. On va considérer le bord-arêtes (edge-boundary). Pour $A \subset \Omega_n$, on note

$$\partial A := \big\{\{x, y\} \ ; \ x \sim y, \ x \in A, \ y \notin A\big\}.$$

1. Montrer que $|\partial A| = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{x \sim y} \big(\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_A(y)\big)^2$.

2. Montrer que pour tout $A \subset \Omega_n$,

$$|\partial A| \geq |A| \log \frac{|2^n}{|A|}$$

3. L'inégalité précédente peut être améliorée. On <u>admettra</u> que pour tout $A \subset \Omega_n$,

$$|\partial A| \geq \frac{1}{\log 2} \, |A| \log \frac{|2^n}{|A|}$$

Montrer que si $A \subset \Omega_n$ est de cardinal $|A| = 2^k$ pour un k entre 0 et n, alors, en notant $B = \{-1, 1\}^k \times (-1, \ldots, -1) = \{x \in \Omega_n \, ; x_{k+1} = \ldots = x_n = 1\}$ le sous-cube de cardinal $|B| = |A|$, on a

$$|\partial A| \geq |\partial B|.$$

Exercice 4. Etablir que pour toute fonction $f : \Omega_n \to \mathbb{R}$ sur le cube discret (muni de la probabilité uniforme σ_n) et tout $p \in [1, 2]$ on a

$$\sqrt{p-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{f}(\{i\})^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_{L^p(\sigma_n)}.$$