Feuille 1

Exercice 11

1. OK
2. Supposons A compact et notons $\alpha = \min A$, $\beta = \max A$

On a : $\{\alpha, \beta\} \subset A \subset [\alpha, \beta]$

et $A + \varepsilon D_1 \supset \underbrace{]\alpha - \varepsilon, \alpha]}_{\subset \{\alpha\} + \varepsilon D_1} \cup A \cup \underbrace{[\beta, \beta + \varepsilon[}_{\subset \{\beta\} + \varepsilon D_1}$

On a donc

$$|A + \varepsilon D_1| \geq \varepsilon + |A| + \varepsilon = |A| + 2\varepsilon$$

Pour A borélien (de mesure non nulle) on a :

$$|A| = \sup_{\substack{K \subset A \\ \text{compact}}} |K| .$$

et $|A + \varepsilon D_1| \geq |K + \varepsilon D_1| \geq |K| + 2\varepsilon$ pour tout $K \subset A$ K compact.

3. Fixons $z \in S_u(A)_\varepsilon$. Il existe donc $\tilde{z} \in S_u(A)$ avec $|z - \tilde{z}| \leq \varepsilon$

Ecrivons :

$$z = y + r u \quad , y \in u^\perp$$
$$\tilde{z} = \tilde{y} + \tilde{r} u \quad , \tilde{y} \in u^\perp$$

Soit $s := |r - \tilde{r}|$

On a : $\underline{|y - \tilde{y}|^2 + s^2 < \varepsilon}$

NOTATION : $A_v := A \cap \{P_{u^\perp} x = v\}$ pour $v \in u^\perp$

On a que $\underline{A_{\tilde{y}} +]-s, s[\, u + (y - \tilde{y}) \subset (A_\varepsilon)_y}$

[En effet, si $x = a + \alpha u + (y - \tilde{y})$ avec $a \in A$, $P_{u^\perp} a = y$, $\alpha \in]-s, s[$

alors $|x - a|^2 \leq \alpha^2 + (y - \tilde{y}) < s^2 + (y - \tilde{y})^2$

Donc $|x - a| < \varepsilon$ et par hyp. $P_{u^\perp} a = y$

On a donc : $|(A_\varepsilon)_y| \geq |A_{\tilde{y}} +]-s, s[\, u|$

$\geq |A_{\tilde{y}}| + 2s$ par la question 2. (sur $\tilde{y} + \mathbb{R}u$)

$> 2\tilde{r} + 2s$ car $\tilde{z} \in S_u(A)_{\tilde{y}}$

$\geq 2r$ par construction

or $|(A_\varepsilon)_y| > 2r \iff z \in S_u(A_\varepsilon)$. On a donc bien $\boxed{S_u(A)_\varepsilon \subset S_u(A_\varepsilon)}$

4. On a : $\{f>t\}_r = \{y\in\mathbb{R}^n ;\ \exists x \text{ tq } |x-y|<r \text{ et } f(x)>t\}$

→ Supposons $\omega_f(r)\leq a$:

Pour $y\in\{f>t\}$, on écrit $f(y) = \underbrace{f(y)-f(x)}_{\geq -a} + \underbrace{f(x)}_{>t}$ avec x ⁵

Donc $y\in\{f>t-a\}$

→ Réciproque : Soit $x,y\in\mathbb{R}^n$ avec $|x-y|<r$. On peut supposer que $f(x)\geq f(y)$ et soit $\alpha\in\mathbb{R}$ avec $\alpha<f(x)$. Alors par hyp, $\underline{f(y)>\alpha-a}$

On a donc : $0\leq f(x)-f(y) \leqslant f(x)-\alpha+a$

En prenant le sup sur $\alpha<f(x)$ on a bien : $0\leq f(x)-f(y)\leq a$

5. Soit $r>0$ fixé et $a:=\omega_f(r)$.

On a : $\forall t>0$

$$\begin{aligned}\{S_u(f)>t\}_r &= (S_u(\{f>t\}))_r \\ &\subset S_u(\{f>t\}_r) \quad \text{d'après le 3.} \\ &\subset S_u(\{f>t-a\}) \quad \text{par hyp. et le 2.} \\ &= \{S_u(f)>t-a\}\end{aligned}$$

Par le 2. on a donc $\omega_{S_u(f)}(r) \leqslant a = \omega_f(r)$.

Exercice 12

Prop | Soit $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions paires, ↓ sur $\mathbb{R}^+$
Alors la fonction $t \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(x-t)\,dx$
est décroissante sur $[0,+\infty[$

Rq : { Par Hardy-Littlewood, on sait que $\int f(x)\,g(x+t)\,dx \leq \int f(x)g(x)dx$
car $[g(\cdot-t)]^*_{(x)} = g(x)$ pp.

Pour une fonction h sur $\mathbb{R}$ et $t\in\mathbb{R}$, NOTONS $h_t(x) := h(x-t)$

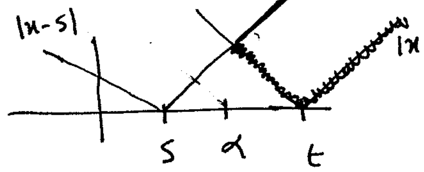
Soit $0 \leq s \leq t$. On souhaite montrer que $\int_{\mathbb{R}} fh \geq 0$

où $h(x) := g(x-s) - g(x-t)$

En utilisant que g est paire, on voit que h est symétrique par rapport à $(0,\alpha)$ où $\alpha = \frac{s+t}{2}$, càd

$h(x+\alpha) = -h(\alpha - x)$, soit encore $h(2\alpha - x) = -h(x)$

De plus, $h \geq 0$ sur $[\alpha, +\infty[$ car $\forall x \geq \alpha$, $|x-s| \leq |x-t|$



et g paire ↓

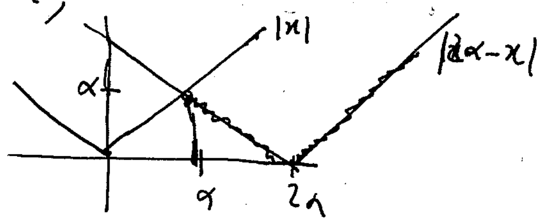
On a :

$$\int_{\mathbb{R}} fh = \int_{-\infty}^{\alpha} fh + \int_{\alpha}^{+\infty} fh = \int_{\alpha}^{+\infty} f(2\alpha - x)\, h(2\alpha - x)\, dx + \int_{\alpha}^{+\infty} fh$$

$$= \int_{\alpha}^{+\infty} \underbrace{h(x)}_{\geq 0} \underbrace{\left[f(x) - f(2\alpha - x) \right]}_{\geq 0}$$

≥ 0 car $\forall x \geq \alpha$, $|2x - \alpha| \leq |x|$

et f paire ↓



Donc $\int fh \geq 0$

Exercice 13

On utilise que pour $A, B, C, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \subset \mathbb{R}^n$:

$$|I(A,B,C) - I(\tilde{A}, B, C)| \leq |A \Delta \tilde{A}| \, \| 1_B * 1_C \|_\infty$$
$$\leq |A \Delta \tilde{A}| \min\{|B|, |C|\}$$

inégalité triangulaire

car $1_B * 1_C(x) = |B \cap (x - C)| \begin{cases} \leq |B| \text{ et} \\ \leq |-C| = |C| \end{cases}$

et donc, en répétant l'argument (et en utilisant les symétries) on a :

$$|I(A,B,C) - I(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})| \leq |A \Delta \tilde{A}|\,|B| + |\tilde{B} \Delta B|\,|C| + |\tilde{C} \Delta C|\,|\tilde{A}|$$

Cela donne le résultat puisque les suites $(|A_k|)_k$, $(|B_k|)_k$, $(|C_k|)_k$ sont bornées et

$|A_k \Delta A| \longrightarrow 0$

$|B_k \Delta B| \longrightarrow 0$

$|C_k \Delta C| \longrightarrow 0$