# Exercices. Feuille 1.

*On notera $f^*$ le réarrangé symétrique décroissant d'une fonction positive $f$, et $S_u(f)$ son symétrisé de Steiner par rapport à une direction $u \in S^{n-1}$. On travaille sauf mention contraire avec des fonctions positives et négligeables à l'infini, c'est-à-dire telles que $|\{f > t\}| < +\infty$ pour tout $t > 0$.*

**Exercice 1.** Soit $f$ une fonction positive mesurable sur $\mathbb{R}^n$ négligeable à l'infini et $\varepsilon > 0$. Montrer que la fonction
$$f_\varepsilon = \min\left\{\varepsilon^{-1}\,,\, (f-\varepsilon)_+\right\}$$
est bornée et intégrable sur $\mathbb{R}^n$, et qu'elle tend en croissant vers $f$. Montrer que de plus
$$(f_\varepsilon)^* = \min\left\{\varepsilon^{-1}\,,\, (f^*-\varepsilon)_+\right\}.$$

**Exercice 2.** Soit $(X, \mu)$ un espace mesuré, et $\phi : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et $C^1$ sur $]0, +\infty[$. Montrer que pour $g : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction positive on a, sous de bonnes hypothèses d'intégrabilité, que
$$\int [\phi(g) - \phi(0)]\, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{g > r\})\phi'(r)\, dr.$$

**Exercice 3.** Soit $a, b > 0$. Donner le réarrangé symétrique décroissant de la fonction continue sur $\mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} 1 - a\,x\,, & 0 \le x \le \frac{1}{a} \\ 1 + b\,x\,, & -\frac{1}{b} \le x \le 0 \\ 0\,, & x \notin [-\frac{1}{b}, \frac{1}{a}] \end{cases}$$

**Exercice 4.** Soit $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante. Montrer que pour toute partie borélienne $A \subset \mathbb{R}^n$ on a
$$\int_A \psi(|x|)\, dx \ge \int_D \psi(|x|)\, dx$$
où $D$ la boule euclidienne centrée en 0 de même volume que $A$.

**Exercice 5. (Sur un cas d'égalité dans l'inégalité de Hardy-Littlewood)** Soit $f$ une fonction positive, négligeable à l'infini, et radiale strictement décroissante (c'est-à-dire $f(x) = \psi(|x|)$ avec $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ strictement décroissante tendant vers 0 à l'infini).

Soit $g$ une fonction positive sur $\mathbb{R}^n$, négligeable à l'infini, telle que
$$\int fg = \int f^* g^*$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'on a alors $g = g^*$ (pp).

1. Montrer que pour presque tout $s > 0$ on a $\displaystyle\int f\mathbb{1}_{\{g>s\}} = \int f(\mathbb{1}_{\{g>s\}})^* = \int f\mathbb{1}_{\{g^*>s\}}$.

2. Montrer que $t \to |\{f > t\}|$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. (*On pourra observer que* $|\{f = t\}| = 0$). En déduire qu'il existe une fonction $r$ continue telle pour $t > 0$ on a $\{f > t\} = r(t)D \cup N_t$ avec $N_t$ de mesure nulle.
3. Montrer que pour tout ensemble mesurable $C \subset \mathbb{R}^n$ de mesure finie, la fonction $F_C(t) = \int \mathbb{1}_{\{f>t\}}(x)\mathbb{1}_C(x)\,dx$ est continue, pour $t > 0$.
4. On se donne $s > 0$ pour lequel l'égalité de la question 1. est réalisé, et on pose $C := \{g > s\}$.
   (a) Montrer que pour tout $t > 0$ on a $F_C(t) = F_{C^*}(t)$.
   (b) Montrer que $C = C^*$ à un ensemble de mesure nulle près.
5. Conclure.

**Exercice 6.** Montrer que le résultat de l'exercice précédent s'applique à la symétrisation de Steiner. Plus précisément, pour $f, g$ deux fonctions négligeable à l'infini, et $u$ une direction on a

$$\int fg \leq \int S_u(f)S_u(g),$$

De plus, montrer que si $f$ est radiale strictement décroissante (et donc en particulier $S_u(f) = f$), alors il y a égalité si et seulement si $g = S_u(g)$ pp.

**Exercice 7.** Montrer que pour $p \in [0, +\infty]$ et $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (négligeables à l'infini), on a, pour toute direction $u$,

$$\|S_u(f) - S_u(g)\|_{L^p} \leq \|f - g\|_{L^p}.$$

**Exercice 8.** Étant donné des réels positifs $a_1, \ldots, a_k \geq 0$, on note $(a_1^*, \ldots, a_k^\star)$ leur réarrangé décroissant, i.e.

$$a_1^* \geq \ldots a_k^* \geq 0 \qquad \text{et} \qquad (a_1^*, \ldots, a_k^*) = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(k)})$$

pour une certaine permuation $\mathcal{S}_k$.
*Remarque : pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^k$, on note $x^* \in \mathbb{R}_+^k$ le réarrangé décroissant de* $(|x_1|, \ldots, , |x_k|)$. *Cela préserve les normes $\ell_p^k$, $\|x\|_p^p := \sum |x_i|^p = \|x^*\|_p^p$.*

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^k a_i\, b_i \leq \sum_{i=1}^k a_i^*\, b_i^*$.
2. Retrouver l'inégalité de Hardy-Littlewood.
3. On se donne des vecteurs $a, b \in \mathbb{R}_+^k$ décroissants, i.e. $a = a^*$ et $b = b^*$, tels que

$$\forall \ell \leq k, \qquad \sum_{i=1}^\ell a_i \leq \sum_{i=1}^\ell b_i.$$

   (a) Montrer que $a$ appartient à l'enveloppe convexe des vecteurs $y \in \mathbb{R}_+^k$ tels que $y^* = b$.
   *On pourra utiliser le théorème de Hahn-Banach et une transformation d'Abel.*
   (b) En déduire que pour $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe décroissante on a

$$\sum_{i=1}^k \varphi(a_i) \leq \sum_{i=1} \varphi(b_i)$$

   En particulier on a $\|a\|_p \leq \|b\|_p$.

**Exercice 9.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Montrer que si $f \in L^p(\mu)$ pour un $p \in [1, +\infty[$, alors $\mu(\{|f| > t\}) \to 0$ quand $t$ tend vers $+\infty$.
2. On se donne une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurable (par exemple $f \in L^\infty(\Omega)$). Montrer qu'on a $\mu(\{|f| > t\}) \to 0$ quand $t$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 10. (Réarrangement abstrait et réarrangement radial)**

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable (positive). Remarquez que $\mu(\{f > t\}) \to 0$ quand $t$ tends vers $+\infty$. On définit le réarrangé

$$f^\sharp : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}_+$$

de $f$ comme l'inverse (à droite) de la fonction (décroissante) de distribution, c'est-à-dire

$$\forall s > 0, \qquad f^\sharp(s) := \inf\{t > 0 \ ; \ \mu(\{f > t\}) \le s\}.$$

   (a) Montrer que $f^\sharp$ est décroissante et continue à droite.

   (b) Montrer que pour $t > 0$,
   $$|\{f^\sharp > t\}| = \mu(\{f > t\})$$
   et que si $f \in L^p(\mu)$, $\int_\Omega f^p \, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} f^\sharp(t)^p \, dt$.

   (c) Etablir que pour des $f, g$ convenables,
   $$\int_\Omega fg \, d\mu \le \int_{\mathbb{R}_+} f^\sharp g^\sharp.$$

2. On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ négligeable à l'infini, on note $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ le réarrangé radialement décroissant.

   (a) Observer que $|\{f^* > t\}| = |\{f^\sharp > t\}| = |\{f > t\}|$, où l'on convient de la même notation pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
   $$f^*(x) \ = \ f^\sharp\big(\omega_n |x|^n\big).$$
   (Soit encore $\widetilde{f^*}(r) = f^\sharp(\omega_n r^n)$ pour $r > 0$).

**Exercice 11. (Epaissaissement, symétrisation de Steiner et module de continuité)** Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, on définit l'épaissi $A_\varepsilon$ comme l'ensemble des points à distance au plus $\varepsilon$ de $A$,

$$A_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ d(y, A) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ \ \exists a \in A, \ d(y, a) < \varepsilon\}.$$

1. Montrer que pour $A \subset \mathbb{R}^n$ on a
$$A_\varepsilon = A + \varepsilon D_n.$$

2. On suppose ici que $n = 1$. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un borélien. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$|A_\varepsilon| \ge |A| + 2\varepsilon = |A| + |\varepsilon D_1|.$$
*On pourra considérer d'abord le cas où $A$ est compact.*

3. Montrer le résultat important suivant sur la symétrisation de Steiner :

   **Théorème.** *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un borélien, $\varepsilon > 0$ et $u \in S^{n-1}$ une direction. Alors, on a*
$$\big(S_u(A)\big)_\varepsilon \subset S_u\big(A_\varepsilon\big).$$

4. Pour $f$ une fonction (uniformément) continue, on définit le module de continuité de $f$ pour $r > 0$ par
$$\omega_f(r) := \sup\{|f(x) - f(y)|\ ;\ |x - y| < r\}.$$
   Montrer que si $f$ est une fonction continue positive sur $\mathbb{R}^n$, alors pour $r > 0$ et $a > 0$ on a :
$$\omega_f(r) \leq a \Longleftrightarrow \forall t > 0, \quad \{f > t\}_r \subset \{f > t - a\}.$$

5. Montrer le théorème suivant :

   **Théorème.** *Soit $f$ une fonction positive uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$ et $u \in S^{n-1}$ une direction. Alors, on a*
$$\omega_{S_u(f)} \leq \omega_f \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*.$$

**Exercice 12.** Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions paires, décroissantes sur $\mathbb{R}_+$ et tendant vers 0 à l'infini. On se donne $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction
$$t \longrightarrow \int f(x)g(x - ta)\,dx$$
est croissante sur $[0, 1]$.

**Exercice 13.** Pour $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ de mesure finie, on pose
$$I(A, B, C) = \iint \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y)\mathbb{1}_C(x - y)\,dxdy.$$
Montrer que si $A_k, B_k, C_k \subset \mathbb{R}^n$ sont des suites d'ensembles de mesures finies tels que $A_k \to A$, $B_k \to B$ et $C_k \to C$ au sens de la mesure de la différence symétrique (c'est-à-dire au sens de la convergence dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ des fonctions indicatrices), alors
$$I(A_k, B_k, C_k) \longrightarrow I(A, B, C)$$