# Exercices. Feuille 2.

**Exercice 1.** Soit $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions log-concaves. Montrer que $f * g$ est aussi log-concave.

**Exercice 2.** On a vu que l'inégalité de Prékopa-Leindler sur $\mathbb{R}^n$ impliquait l'inégalité de Brunn-Minkowski sur $\mathbb{R}^n$. « Réciproquement », montrer que l'inégalité Prékopa-Leindler sur $\mathbb{R}^n$ peut se retrouver à partir de l'inégalité de Brunn-Minkowski sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

**Exercice 3.** On note $\gamma_n$ la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^n$, $d\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2}\, e^{-|x|^2}\, dx$.

1. En utilisant le théorème de Prékopa-Leindler, montrer :

   **Théorème 1.** *Soit $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ et $t \in [0,1]$ tels que*

   $$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad h((1-t)x + ty) \geq e^{-|x-y|^2/4}\, f(x)^{1-t}\, g(y)^t.$$

   *Alors, on a :*

   $$\int h\, d\gamma_n \geq \left(\int f\, d\gamma_n\right)^{1-t} \left(\int g\, d\gamma_n\right)^t.$$

2. Pour $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donné, on définit $Q(F)$ par

   $$Q(F)(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{F(x) + \frac{1}{4}|x-y|^2\right\}.$$

   Montrer que pour tout $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (avec $e^{-F} \in L^1(\gamma_n)$) on a :

   $$\int e^{-F}\, d\gamma_n \int e^{Q(F)}\, d\gamma_n \ \leq 1.$$

3. **(Inégalité de concentration de la mesure pour la mesure gaussienne)**
   Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application $L$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que

   $$\forall \lambda > 0, \qquad \iint e^{\lambda[f(x)-f(y)]}\, d\gamma_n(x) d\gamma_n(y) \leq e^{L^2 \lambda^2}$$

   En utilisant que $\int e^{\lambda\left[f - \int f d\gamma_n\right]}\, d\gamma_n \leq \iint e^{\lambda[f(x)-f(y)]}\, d\gamma_n(x) d\gamma_n(y)$, en déduire que

   $$\forall r \geq 0, \qquad \gamma_n\big(\big\{\big|f - \textstyle\int f\, d\gamma_n\big| \geq r\big\}\big) \leq 2e^{-r^2/(4L^2)}.$$

**Exercice 4. (Transport de mesure et inégalité de Bliss)** On fixe $p \in ]1, n[$, et on note $p^\star = np/(n-p)$ et $q = p/(p-1)$. On fixe $b > 0$ tel que la fonction $\psi_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ donnée par

$$\psi_0(r) := (b + r^q)^{-n/p^\star}$$

vérifie $\int_0^\infty \psi_0(r)^{p^\star}\, r^{n-1}\, dr = 1$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction Lipschitz, de support exactement $[0, A]$, et telle que $\int_0^\infty \varphi(r)^{p^\star}\, r^{n-1}\, dr = 1$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $T$ sur $[0,A[$, $C^1$ et strictement croissante, avec $T([0,A[) = [0,+\infty[$, telle que

$$\forall t \in [0,A[, \qquad \int_0^t \varphi(r)^{p^\star} r^{n-1}\, dr = \int_0^{T(t)} \psi_0(r)^{p^\star} r^{n-1}\, dr,$$

et $\psi_0(r)^{p^\star} T(r)^{n-1} T'(r) = \varphi(r)^{p^\star} r^{n-1}$.
2. Montrer que pour tout $r \in ]0,A[$ on a

$$\psi_0(r)^{-p^\star/n} \leq \frac{1}{n} \varphi(r)^{-p^\star/n} \frac{1}{r^{n-1}} \big(r^{n-1} T\big)'.$$

et en déduire que

$$\int_0^A \psi_0^{p^\star(1-1/n)}(T(r)) T(r)^{n-1} T'(r)\, dr \leq \frac{p(n-1)}{n(n-p)} \int_0^A \varphi'(r)\, \varphi(r)^{p^\star/q}\, r^{n-1} T(r)\, dr.$$

3. Montrer qu'on a l'inégalité

$$\Big(\int_{\mathbb{R}_+} |\varphi'(r)|^p\, r^{n-1}\, dr\Big)^{1/p} \geq C_{n,p} := \frac{n(n-p)}{p(n-1)} \cdot \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \psi_0^{p^\star(1-1/n)}(r)\, r^{n-1}\, dr}{\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \psi_0(r)^{p^\star} r^{n-1+q}\, dr\Big)^{1/q}},$$

et que de plus il y a égalité dans cette inégalité lorsque l'on prend $\varphi = \psi_0$ (pour cela on pourra remonter les calculs et remarquer que, dans ce cas, il y a égalité dans toutes les étapes précédentes).
4. Montrer que pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ Lipschitz, de support un segment $[0,A]$, on a

$$\frac{\Big(\int_{\mathbb{R}_+} |\varphi'(r)|^p r^{n-1}\, dr\Big)^{1/p}}{\Big(\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(r)^{p^\star} r^{n-1}\Big)^{1/p^\star}} \geq C_{n,p} = \frac{\Big(\int_{\mathbb{R}_+} |\psi_0'(r)|^p r^{n-1}\, dr\Big)^{1/p}}{\Big(\int_{\mathbb{R}_+} \psi_0(r)^{p^\star} r^{n-1}\Big)^{1/p^\star}}$$

**Exercice 5. (Inégalité de Santaló)** Dans la suite, $u$ sera une direction et $H = u^\perp$. Pour simplifier les notations, on suppose que $u = e_n$ et donc pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ plutôt que d'écrire $x = P_H x + (x \cdot u)$, on écrit simplement $x = (z,t)$ avec $z \in \mathbb{R}^{n-1} \simeq H$ et $t \in \mathbb{R}$.

1. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe (borné). Montrer que

$$S_u C = \bigcup_{z \in P_H C} \{z\} \times \frac{C_z - C_z}{2} = \big\{(z,t)\ ;\ z \in P_H C,\ t = \frac{t_1 - t_2}{2},\ t_1, t_2 \in C\big\}.$$

Dans la suite, on se donne un corps convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, par définition, un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide, et tel que $K = -K$. C'est un exercice classique de montrer que $K$ est un corps convexe symétrique si et seulement si il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ tel que

$$K = B_{\|\cdot\|} := \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \|x\| \leq 1\}.$$

On appelle polaire de $K$ et on note $K^\circ$ le corps associé à la norme duale, c'est-à-dire, par définition,

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ x \cdot y \leq 1, \ \forall x \in K\}.$$

Remarquez qu'on peut tout aussi bien imposer $|x \cdot y| \leq 1, \ \forall x \in K$, puisque $K$ est symétrique. On voit que $K^\circ$ est encore un corps convexe symétrique.
(Remarque : il découle du théorème de Hahn-Banach que $(K^\circ)^\circ = K$.)

On notera $L = S_u K$ le symétrisé de Steiner de $K$ dans la direction $u$ (qui est toujours $e_n$).

2. Montrer que

$$K^\circ = \big\{(y, s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \ ; \ z \cdot y + ts \leq 1, \ \forall z \in P_H K \text{ et } t \in \mathbb{R} \text{ avec } (z, t) \in K\big\}$$

   et

$$L^\circ = \big\{(y, s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \ ; \ z \cdot y + s\frac{t_1 - t_2}{2} \leq 1, \ \forall z \in P_H K \text{ et } t_i \in \mathbb{R} \text{ avec } (z, t_i) \in K, \ i = 1, 2\big\}.$$

3. Pour $s \in \mathbb{R}$ et $C \subset \mathbb{R}^n$, on note $C[s] := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \ ; \ (y, s) \in C\}$. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{K^\circ[s] + K^\circ[-s]}{2} \subset L^\circ[s]$$

   et en déduire que $|K^\circ[s]| \ \leq |L^\circ[s]|$.

4. Montrer que

$$|(S_u K)^\circ| \geq |K^\circ|.$$

5. En admettant un théorème de convergence des suites de symétrisations de Steiner, montrer le théorème suivant

   **Théorème.** *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe symétrique. Alors, on a :*

$$|K| \ |K^\circ| \ \leq |D_n|^2.$$

**Exercice 6. (Prékopa-Leindler multiplicatif, corps inconditionnels et inégalité Santaló)** On note $P^n = (\mathbb{R}_+^*)^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_i > 0\}$ et pour $x, y \in P$ et $t \in [0, 1]$, on définit $z = x^{1-t} \times y^t \in P$ par $z_i = x_i^{1-t} y_i^t$, $i = 1, \ldots, n$.

1. (Prékopa multiplicatif) Montrer que si $f, g, h : P^n \to \mathbb{R}_+$ sont tels que,

$$\forall x, y \in P^n, \qquad h(x^{1-t} \times y^t) \geq f(x)^{1-t} g(y)^t,$$

   alors $\displaystyle\int_{P^n} h \geq \left(\int_{P^n} f\right)^{1-t} \left(\int_{P^n} g\right)^t$.

2. Un corps convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ est dit inconditionnel si il est invariant par les $\sigma_{e_i}$, les symétries orthogonales par rapport aux hyperplans $e_i^\perp$ de coordonné , soit encore si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in K \iff (\pm x_1, \ldots, \pm x_n) \in K \iff (|x_1|, \ldots, |x_n|) \in K.$$

   (a) Montrer que si $K$ est inconditionnel, alors$|K| = 2^n |K \cap P^n|$.

   (b) Retrouver l'inégalité de Santaló $|K| \ |K^\circ| \ \leq |D_n|^2$ lorsque $K$ est un corps convexe inconditionnel.