

Exercices. Feuille 3.

Exercice 1. On fixe $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ tels que $\text{Vect}(\{a_j\}) = \mathbb{R}^n$. Pour $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ on pose

$$I(A_1, \dots, A_m) = \int \prod_{j=1}^m 1_{A_j}(x \cdot a_j) dx = |\{x \in \mathbb{R}^n ; \forall j \leq m, x \cdot a_j \in A_j\}|.$$

Supposons que les ensembles A_j sont bornés, et que $(A_j^k)_k \subset \mathbb{R}$ sont des suites bornées (au sens où les ensembles restent dans un certain compact) d'ensembles tels $1_{A_j^k} \rightarrow 1_{A_j}$ dans $L^1(\mathbb{R})$, pour $j = 1, \dots, m$. Montrer qu'alors $I(A_1^k, \dots, A_m^k) \rightarrow I(A_1, \dots, A_m)$.

Exercice 2. On fixe $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ et $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont des fonctions log-concave paires, alors la fonction

$$t \rightarrow \int \prod_{j=1}^m f_j(x \cdot a_j + tb_j) dx$$

est décroissante sur \mathbb{R}_+ .

On rappelle la formule de **Cauchy-Binet** : Pour A une matrice $n \times m$, avec $m \geq n$, on a

$$\det(A^t A) = \sum_{|S|=n} (\det(A_S))^2$$

où la somme a lieu sur les parties $S \subset \{1, \dots, m\}$ de cardinal n et où A_S désigne la matrice extraite de A en ne conservant que les n colonnes d'indices dans S .

Exercice 3. Soit $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, $A := [a_1, \dots, a_m]$ la matrice $n \times m$ associée, et $c = (c_1, \dots, c_m)$ tels que $c_j > 0$ et $\sum c_j = n$. On pose, comme dans le cours,

$$D_G^2 := \sup \left\{ \frac{\prod_{j=1}^m \alpha_j^{c_j}}{\det(\sum \alpha_j c_j a_j \otimes a_j)} ; \alpha_j > 0, j = 1, \dots, m \right\}.$$

Pour $S \subset \{1, \dots, m\}$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_+)^m$ donné, on note $\alpha_S := \prod_{j \in S} \alpha_j$. Posons enfin

$$J_S := c_S (\det(A_S))^2,$$

où A_S la matrice extraite de A en ne prenant que les colonnes dans $S \subset \{1, \dots, m\}$.

1. Montrer que pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_+)^m$ on a

$$\det(A[\alpha]) = \sum_{|S|=n} J_S \alpha_S$$

2. On suppose qu'il existe $z = (z_1, \dots, z_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m$ tel que

$$\forall j = 1, \dots, m, \quad c_j = \frac{\sum_{|S|=n, S \ni j} J_S z_S}{\sum_{|S|=n} J_S z_S}.$$

Montrer que la constante D_G dans BL (exprimé avec les c_j) est atteinte pour les gaussiennes $g_j(t) = e^{-z_j t^2}$, c'est-à-dire

$$D_G^2 = \frac{\prod_{j=1}^m z_j^{c_j}}{\sum_{|S|=n} J_S z_S}$$

Exercice 4.

1. Soit B une matrice $n \times m$ dont les n lignes forment une base orthonormée de \mathbb{R}^m .

(a) Montrer que

$$\sum_{|S|=n} (\det(B_S))^2 = 1.$$

(b) Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$\sum_{|S|=n, S \ni j} (\det(B_S))^2 = |b_j|^2$$

où $b_j \in \mathbb{R}^n$ est la j ème colonne de B .

2. Soit $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ des directions (i.e. $|u_j| = 1$) et $c_1, \dots, c_j > 0$ tels que

$$\sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i = 1 = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Montrer que dans ce cas

$$D_G^2 := \sup \left\{ \frac{\prod_{j=1}^m \alpha_j^{c_j}}{\det(\sum c_j \alpha_j u_j \otimes u_j)} ; \alpha_j > 0, j = 1, \dots, m \right\} = 1.$$

Exercice 5. (Dualité de formes quadratiques) Soit $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs engendrant \mathbb{R}^n . Etant donné $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ on considère la forme quadratique $Q(x) :=$

$Ax \cdot x = \sum \alpha_j (v_j \cdot x)^2$ associée $A := \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j \otimes v_j$. On pourra remarquer que A est définie

positive. Montrer que la forme quadratique duale $M(y) := \sup\{x \cdot y ; Q(x) \leq 1\} = A^{-1}y \cdot y$ vérifie

$$M(y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{\alpha_i} ; y = \sum_{i=1}^m \theta_i v_i \right\}$$

Exercice 6. (Théorème et décomposition de John) Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe symétrique ; on notera $\|\cdot\|_K$ la norme associée, K° le polaire de K associé à la norme duale $\|\cdot\|_{K^\circ}$, et $B_2^2 = \{|\cdot| \leq 1\}$ la boule euclidienne. On introduit la norme suivante sur les applications linéaires : pour $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|A\| := \sup_{|x|=1} \|Ax\|_K.$$

1. On suppose que $B_2^n \subset K$.

(a) Montrer que $\partial K \cap B_2^n = \partial K \cap \partial B_2^n$.

(b) Montrer que $K^\circ \subset B_2^n$.

(c) Montrer que si $x \in \partial K \cap B_2^n$, alors $x \in \partial K^\circ$ et pour tout $y \in K^\circ$ tel que $y \neq x$ on a $x \cdot y < 1$.

Dans la suite, on suppose que B_2^n est l'ellipsoïde de volume maximal inclu dans K , c'est-à-dire que pour $\mathcal{E} = AB_2^n$ avec $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, si $\mathcal{E} \subset K$, ce qui équivaut à $\|A\| \leq 1$ (OK?), alors $|\mathcal{E}| \leq |B_2^n|$.

On peut se persuader qu'étant donné un corps convexe symétrique K , il existe toujours un ellipsoïde de volume maximal inclus dans K , et qu'en faisant une transformation linéaire sur K , on peut se ramener au cas où cet ellipsoïde est la boule euclidienne)

2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ on a $\|A\| \geq |\det(A)|^{1/n}$.

3. On considère $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe $x \in \partial K \cap B_2^n$ tel que

$$\|Sx\|_K \geq \frac{1}{n} \text{Tr}(S).$$

On pourra considérer $x_\varepsilon \in S^{n-1}$ un vecteur où l'application $\text{Id} + \varepsilon S$ atteint sa norme $\|\cdot\|$ et utiliser que $(\det(I + \varepsilon S))^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} \text{Tr}(S) + o(\varepsilon)$ et étudier les différentes limites lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

4. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ et $S_\varepsilon = \text{Id} + \varepsilon T$.

(a) Montrer qu'il existe $x_\varepsilon \in \partial K \cap B_2^n$ et $y_\varepsilon \in \partial K^\circ$ tel que

$$\|S_\varepsilon(x_\varepsilon)\|_K = S_\varepsilon(x_\varepsilon) \cdot y_\varepsilon \quad \text{et} \quad T(x_\varepsilon) \cdot y_\varepsilon \geq \frac{1}{n} \text{Tr}(T).$$

(b) En déduire qu'il existe $x_0 \in \partial K \cap B_2^n$ tel que

$$T(x_0) \cdot x_0 \geq \frac{1}{n} \text{Tr}(T).$$

(c) Première application : en considérant $T = x \otimes x$ pour $x \in K$, montrer que

$$K \subset \sqrt{n} B_2^n.$$

5. Montrer que $\frac{1}{n} \text{Id}$ appartient à l'enveloppe convexe de $\{u \otimes u ; u \in K \cap B_2^n\}$.

On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Hahn-Banach dans l'espace euclidien $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ muni du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^t AB)$, et appliquer le (b) de la question précédente

6. En déduire le

Théorème. *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe symétrique tel que B_2^n soit l'ellipsoïde de volume maximal dans K . Alors il existe des points de contact $x_1, \dots, x_m \in K \cap B_2^n$ et $c_1, \dots, c_m > 0$ tels que*

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i \otimes x_i = \text{Id}.$$