Fin de l'exercice 3 de la feuille 6

Tout d'abord, il fallait corriger l'énoncé : À la question 6 on obtient $\Delta(g^2) = 2g\Delta g + |\partial g|^2$ et par conséquent pour $g_t = P_t(f^2)^{1/2}$, $\underline{\partial_t g_t = \Delta g_t + \frac{1}{2}\frac{|\partial g_t|^2}{g_t}}$

Reprenons la question 8 :

La dérivée de $\alpha(t) = \int \prod_{i=1}^{n} (P_t f_i^2)^{1/2} d\mu$ vaut, au point $t_0 \geq 0$

$$\underline{A := \int \sum_{j=1}^{n} \left(\Delta g_j + \frac{1}{2}\frac{|\partial g_j|^2}{g_j}\right) \prod_{i \neq j} g_i \, d\mu}$$

où $g_j(\sigma) := P_{t_0}(f_j^2)^{1/2}(\sigma)$

commutation de ∂_τ et P_t

<u>Rappel</u> : f_i ne dépend que de $\sigma(i) \Rightarrow P_t(f_i^2)$ ne dépend que de $\sigma(i)$

$\Rightarrow g_i$ ne dépend que de $\sigma(i)$

$\Rightarrow$ (*) $\partial_\tau g_i(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\forall \tau \in \mathcal{T}_n$ tel que $i \notin \mathrm{supp}(\tau)$

Pour $j \in [\![n]\!]$ on a

$$\int \Delta g_j \prod_{i\neq j} g_i \, d\mu = -\frac{1}{2} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_n} \int \partial_\tau g_j \, \partial_\tau\Big(\prod_{i \neq j} g_i\Big) d\mu$$

$$\overset{\text{par } (*)}{=} -\frac{1}{2} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \int \partial_{(lj)} g_j \, \underbrace{\partial_{(lj)}\Big(\prod_{i\neq j} g_i\Big)}_{=\left(\prod_{i\neq j, i \neq l} g_i\right) \partial_{(lj)} g_l} d\mu$$

car $g_i(\sigma\circ(lj)) = g_i(\sigma)$ si $i \neq l$ et $i \neq j$

On a donc,

$$\int \Delta g_j \left(\prod_{i\neq j} g_i\right) d\mu = -\frac{1}{2} \sum_{l\neq j} \int \left(\partial_{(lj)} g_j\right)\left(\partial_{(lj)} g_l\right)\left(\prod_{i\notin\{j,l\}} g_i\right) d\mu$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{l\neq j} \int \frac{\partial_{(lj)} g_j}{g_j} \frac{\partial_{(lj)} g_l}{g_l} G \, d\mu$$

où $G = \prod_{i=1}^{n} g_i$

Soit encore, d'après la définition de A,

$$A = -\frac{1}{2}\sum_j \sum_{l\neq j} \int \frac{\partial_{(lj)} g_j}{g_j} \frac{\partial_{(lj)} g_l}{g_l} G \, d\mu + \frac{1}{2}\sum_j \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} \int \frac{\left(\partial_{(lj)} g_j\right)^2}{g_j^2} G \, d\mu$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\substack{l,j=1 \\ l\neq j}}^{n} \int \left(\frac{\partial_{(lj)} g_j}{g_j} - \frac{\partial_{(lj)} g_l}{g_l}\right)^2 d\mu \qquad \text{(et voilà!)}$$

$$\geq 0$$

Conclusion : α est croissante

Donc $\displaystyle\int \prod_{i=1}^{n} f_i \, d\mu = \alpha(0) \leq \alpha(\infty) = \prod_{i=1}^{n} \left(\int f_i^2 d\mu\right)^{1/2} \int 1 \, d\mu$

$$= \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^2(\mu)}$$

question 9 : Il s'agit simplement d'une réécriture en regardant les colonnes de A comme des fonctions sur $\{1, \dots, n\}$

ie : $f_j(\sigma) = a_{\sigma(j)j}$ → ne dépend que de $\sigma(j)$ par construction

On a : $\displaystyle\|f_j\|^2_{L^2(\mu)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = \frac{1}{n} |a_j|^2$

$$\int \prod_{j=1}^{n} f_j(\sigma) \, d\mu(\sigma) = \frac{1}{n!} \operatorname{Perm}(A)$$

$\boxtimes$