Exercices. Feuille 1.

On notera f^* le réarrangé symétrique décroissant d'une fonction positive f.

Exercice 1. *Soit f une fonction positive négligeable à l'infini.*

1. *Montrer que $f^*(x) = \psi(|x|)$ avec ψ décroissante et continue à droite.*
2. *(Réciproque) Soit g une fonction sur $\mathbb{R}^n$ equimesurable à f et telle que $g(x) = \psi(|x|)$ avec ψ décroissante et continue à droite. Montrer que $f^* = g$.*

Exercice 2. *Soit f une fonction positive mesurable sur $\mathbb{R}^n$ négligeable à l'infini et $\varepsilon > 0$. Montrer que la fonction*

$$f_\varepsilon = \min\left\{\varepsilon^{-1}\,,\,(f-\varepsilon)_+\right\}$$

est bornée et intégrable sur $\mathbb{R}^n$, et qu'elle tend en croissant vers f. Montrer que de plus

$$(f_\varepsilon)^* = \min\left\{\varepsilon^{-1}\,,\,(f^*-\varepsilon)_+\right\}.$$

Exercice 3. *Soit (X,μ) un espace mesuré, et $\phi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et C^1 sur $]0,+\infty[$. Montrer que pour $g : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction positive on a, sous de bonnes hypothèses d'intégrabilité, que*

$$\int [\phi(g)-\phi(0)]\,d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{g>r\})\phi'(r)\,dr.$$

Exercice 4. *Soit $a, b > 0$. Donner le réarrangé symétrique décroissant de la fonction continue sur $\mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - a\,x\,, & 0 \le x \le \frac{1}{a} \\ 1 + b\,x\,, & -\frac{1}{b} \le x \le 0 \\ 0\,, & x \notin [-\frac{1}{b}, \frac{1}{a}] \end{cases}$$

Exercice 5. *Soit $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante. Montrer que pour toute partie borélienne $A \subset \mathbb{R}^n$ on a*

$$\int_A \psi(|x|)\,dx \ge \int_D \psi(|x|)\,dx$$

où D la boule euclidienne centrée en 0 de même volume que A.

Exercice 6. (Sur un cas d'égalité dans l'inégalité de Hardy-Littlewood) *Soit f une fonction positive, négligeable à l'infini, et radiale strictement décroissante (c'est-à-dire $f(x) = \psi(|x|)$ avec $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ strictement décroissante tendant vers 0 à l'infini).*

Soit g une fonction positive sur $\mathbb{R}^n$, négligeable à l'infini, telle que

$$\int fg = \int f^* g^*$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'on a alors $g = g^*$ (pp).

1. *Montrer que pour presque tout $s > 0$ on a $\int f\,\mathbb{1}_{\{g>s\}} = \int f(\mathbb{1}_{\{g>s\}})^* = \int f\,\mathbb{1}_{\{g^*>s\}}$.*
2. *Montrer que $t \to |\{f > t\}|$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. (On pourra observer que $|\{f = t\}| = 0$). En déduire qu'il existe une fonction r continue telle pour $t > 0$ on a $\{f > t\} = r(t)D \cup N_t$ avec N_t de mesure nulle.*
3. *Montrer que pour tout ensemble mesurable $C \subset \mathbb{R}^n$ de mesure finie, la fonction $F_C(t) = \int \mathbb{1}_{\{f>t\}}(x)\mathbb{1}_C(x)\,dx$ est continue, pour $t > 0$.*
4. *On se donne $s > 0$ pour lequel l'égalité de la question 1. est réalisé, et on pose $C := \{g > s\}$.*
   (a) *Montrer que pour tout $t > 0$ on a $F_C(t) = F_{C^*}(t)$.*
   (b) *Montrer que $C = C^*$ à un ensemble de mesure nulle près.*
5. *Conclure.*

Exercice 7. *Étant donné des réels positifs $a_1, \dots, a_k \geq 0$, on note $(a_1^*, \dots, a_k^\star)$ leur réarrangé décroissant, i.e.*

$$a_1^* \geq \dots a_k^* \geq 0 \qquad \text{et} \qquad (a_1^*, \dots, a_k^*) = (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k)})$$

pour une certaine permuation $\mathcal{S}_k$.

Remarque : pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^k$, on note $x^* \in \mathbb{R}_+^k$ le réarrangé décroissant de $(|x_1|, \dots, , |x_k|)$. Cela préserve les normes des espaces ℓ_p^k définies par $\|x\|_p^p := \sum |x_i|^p = \|x^*\|_p^p$.

1. *Montrer que* $\displaystyle\sum_{i=1}^k a_i\, b_i \leq \sum_{i=1}^k a_i^*\, b_i^*.$
2. *Retrouver l'inégalité de Hardy-Littlewood.*
3. *On se donne des vecteurs $a, b \in \mathbb{R}_+^k$ décroissants, i.e. $a = a^*$ et $b = b^*$, tels que*
   $$\forall \ell \leq k, \qquad \sum_{i=1}^{\ell} a_i \leq \sum_{i=1}^{\ell} b_i.$$
   (a) *Montrer que a appartient à l'enveloppe convexe des vecteurs $y \in \mathbb{R}_+^k$ tels que $y^* = b$.*
   (On pourra utiliser le théorème de Hahn-Banach et une transformation d'Abel.)
   (b) *En déduire que pour $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe décroissante on a*
   $$\sum_{i=1}^k \varphi(a_i) \leq \sum_{i=1} \varphi(b_i)$$
   En particulier on a $\|a\|_p \leq \|b\|_p$.

Exercice 8. (Réarrangement abstrait et réarrangement radial)

1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable (positive). Remarquez que $\mu(\{f > t\}) \to 0$ quand t tends vers $+\infty$. On définit le réarrangé*
   $$f^\sharp :]0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$$

de f comme l'inverse (à droite) de la fonction (décroissante) de distribution, c'est-à-dire

$$\forall s > 0, \qquad f^\sharp(s) := \inf\{t > 0\ ;\ \mu(\{f > t\}) \le s\}.$$

(a) *Montrer que $f^\sharp$ est décroissante et continue à droite.*

(b) *Montrer que pour $t > 0$,*

$$|\{f^\sharp > t\}| = \mu(\{f > t\})$$

et que si $f \in L^p(\mu)$, $\int_\Omega f^p\, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} f^\sharp(t)^p\, dt$.

(c) *Etablir que pour des f, g convenables,*

$$\int_\Omega fg\, d\mu \le \int_{\mathbb{R}_+} f^\sharp g^\sharp.$$

2. *On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ négligeable à l'infini, on note $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ le réarrangé radialement décroissant.*

   (a) *Observer que $|\{f^* > t\}| = |\{f^\sharp > t\}| = |\{f > t\}|$, où l'on convient de la même notation pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^n$.*

   (b) *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$f^*(x) \;=\; f^\sharp\big(\omega_n |x|^n\big).$$

   (Soit encore $\widetilde{f^*}(r) = f^\sharp(\omega_n r^n)$ pour $r > 0$).