Exercices. Feuille 2.

On notera f^* le réarrangé symétrique décroissant d'une fonction positive f sur $\mathbb{R}^n$. et $S_u(f)$ son symétrisé de Steiner par rapport à une direction $u \in S^{n-1}$. On notera pour une direction u, σ_u la réflection par rapport à l'hyperplan $u^\perp$.

Exercice 1. *Soit u une direction et $(A_k)_k$ une suite décroissante d'ensembles (Boréliens) de $\mathbb{R}^n$. Montrer que*

$$S_u\Big(\bigcap_k A_k\Big) = \bigcap_k S_u(A_k).$$

Exercice 2. (Le support du symétrisé est le symétrisé du support) *Soit f une fonction positive sur $\mathbb{R}^n$ et u une direction. Montrer que*

$$\big\{S_u f > 0\big\} = S_u\big(\{f > 0\}\big).$$

Exercice 3. (Hardy-Littlewood pour la symétrisation de Steiner) *Soit f, g deux fonctions positives négligeable à l'infini, et u une direction.*

1. *Montrer que*
$$\int fg \leq \int S_u(f) S_u(g),$$
2. *Montrer que le résultat de l'exercice de la feuille précédente sur un cas d'égalité dans l'inégalité de Hardy-Littlewood s'applique aussi à la symétrisation de Steiner. Plus précisément, montrer que si, de plus, f est radiale strictement décroissante (et donc en particulier $S_u(f) = f$), alors il y a égalité si et seulement si $g = S_u(g)$ pp.*

Exercice 4. *Montrer que pour $p \in [0, +\infty]$ et $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (négligeables à l'infini), on a, pour toute direction u,*

$$\|S_u(f) - S_u(g)\|_{L^p} \leq \|f - g\|_{L^p}.$$

Exercice 5. (Epaissaissement, symétrisation de Steiner et module de continuité) *Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, on définit l'épaissi A_ε comme l'ensemble des points à distance au plus ε de A,*

$$A_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ d(y, A) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ \ \exists a \in A, \ d(y, a) < \varepsilon\}.$$

1. *Montrer que pour $A \subset \mathbb{R}^n$ on a*
$$A_\varepsilon = A + \varepsilon D_n.$$
2. *On suppose ici que $n = 1$. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un borélien. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,*
$$|A_\varepsilon| \geq |A| + 2\varepsilon = |A| + |\varepsilon D_1|.$$
   On pourra considérer d'abord le cas où A est compact.
3. *Montrer le résultat fondamental suivant sur la symétrisation de Steiner :*
   Théorème. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un borélien, $\varepsilon > 0$ et $u \in S^{n-1}$ une direction. Alors, on a*
$$\big(S_u(A)\big)_\varepsilon \subset S_u\big(A_\varepsilon\big).$$

4. *Pour f une fonction (uniformément) continue, on définit le module de continuité de f pour $r > 0$ par*
$$\omega_f(r) := \sup\{|f(x) - f(y)|\ ;\ |x - y| < r\}.$$
Montrer que si f est une fonction continue positive sur $\mathbb{R}^n$, alors pour $r > 0$ et $a > 0$ on a :
$$\omega_f(r) \leq a \Longleftrightarrow \forall t > 0, \quad \{f > t\}_r \subset \{f > t - a\}.$$
5. *Montrer le théorème suivant :*

Théorème. *Soit f une fonction positive uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$ et $u \in S^{n-1}$ une direction. Alors, on a*
$$\omega_{S_u(f)} \leq \omega_f \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 6.

1. *Soit $u_1,\ u_2 \in S^1$ deux directions ayant un angle irrationnel (pour être précis, $u_1 \cdot u_2 = \cos(2\pi\alpha)$ avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$). Montrer que pour tout $x \in S^1$, l'orbite de x par le groupe engendré par σ_{u_1} et σ_{u_2} est dense dans S^1.*
2. *On considère le plongement naturel de $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$. Pour $u_1, u_2 \in S^1$ comme précédemment, on pose $\tilde{v}_1 = (u_1, 0), \tilde{v}_2 = (u_2, 0) \in S^2$ et $v_3 = (1,1,1)/\sqrt{3} \in S^2$. Montrer que pour tout $x \in S^2$, l'orbite de x par le groupe engendré par σ_{v_1}, σ_{v_2} et σ_{v_3} est dense dans S^2.*
3. *Montrer qu'il existe n reflections $\sigma_{u_1}, \ldots, \sigma_{u_n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $x \in S^{n-1}$, l'orbite de x par le groupe engendré par ces reflections est dense dans S^{n-1}.*

Exercice 7. *Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions paires, décroissantes sur $\mathbb{R}_+$ et tendant vers 0 à l'infini. On se donne $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction*
$$t \longrightarrow \int f(x) g(x - ta)\, dx$$
est croissante sur $[0,1]$.

Exercice 8. *Pour $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ de mesure finie, on pose*
$$I(A,B,C) = \iint \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(y) \mathbb{1}_C(x-y)\, dxdy.$$
Montrer que si $A_k, B_k, C_k \subset \mathbb{R}^n$ sont des suites d'ensembles de mesures finies tels que $A_k \to A$, $B_k \to B$ et $C_k \to C$ au sens de la mesure de la différence symétrique (c'est-à-dire au sens de la convergence dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ des fonctions indicatrices), alors
$$I(A_k, B_k, C_k) \longrightarrow I(A,B,C)$$