Exercices. Feuille 3.

Exercice 1. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de dimension $k \in [1, n-1]$. On définit la fonction section comme suit :

$$\forall y \in E, \qquad f_{C,E}(y) := |C \cap (y + E^{\perp})|,$$

où le volume est calculé dans $\mathbb{R}^{n-k} \simeq y + E^{\perp}$. Montrer que $f_{C,E}^{1/(n-k)}$ est concave sur son support (en particulier $f_{C,E}$ est log-concave sur E). En déduire que si C est symétrique, alors $f_{C,E}$ atteint son maximum en $y = 0$.

Exercice 2. Soit f une fonction positive sur $\mathbb{R}^N$.

1. Montrer que si f^{β} est concave (sur son support) pour un $\beta > 0$, alors pour tout $\alpha \in [0, \beta]$, f^{α} est concave sur son support (pour $\alpha = 0$ on convient de remplacer f^{α} par $\log(f)$).
2. (Réciproque partielle dans le cas homogène) On suppose que f est k-positivement homogène, c'est-à-dire que $f(tx) = t^k f(x)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}^N$. Montrer que si f^{α} est concave pour un $\alpha \in [0, k]$, alors f^k est concave.

Exercice 3. Soit $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions log-concaves. Montrer que $f * g$ est aussi log-concave.

Exercice 4. On a vu que l'inégalité de Prékopa-Leindler sur $\mathbb{R}^n$ impliquait l'inégalité de Brunn-Minkowski sur $\mathbb{R}^n$. « Réciproquement », montrer que l'inégalité Prékopa-Leindler sur $\mathbb{R}^n$ peut se retrouver à partir de l'inégalité de Brunn-Minkowski sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 5. On note γ_n la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^n$, $d\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2}\, e^{-|x|^2}\, dx$.

1. En utilisant le théorème de Prékopa-Leindler, montrer :

   Théorème 1. *Soit $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ et $t \in [0,1]$ tels que*

   $$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad h((1-t)x + ty) \geq e^{-|x-y|^2/4}\, f(x)^{1-t}\, g(y)^t.$$

   Alors, on a :

   $$\int h\, d\gamma_n \geq \left(\int f\, d\gamma_n \right)^{1-t} \left(\int g\, d\gamma_n \right)^{t}.$$

2. Pour $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donné, on définit $Q(F)$ par

   $$Q(F)(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ F(x) + \frac{1}{4}|x-y|^2 \}.$$

   Montrer que pour tout $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (avec $e^{-F} \in L^1(\gamma_n)$) on a :

   $$\int e^{-F}\, d\gamma_n \int e^{Q(F)}\, d\gamma_n \ \leq 1.$$

3. **(Inégalité de concentration de la mesure pour la mesure gaussienne)** Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application L-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que

   $$\forall \lambda > 0, \qquad \iint e^{\lambda[f(x) - f(y)]}\, d\gamma_n(x) d\gamma_n(y) \leq e^{L^2 \lambda^2}$$

En utilisant que $\int e^{\lambda\left[f-\int f d\gamma_n\right]}\, d\gamma_n \leq \iint e^{\lambda[f(x)-f(y)]}\, d\gamma_n(x) d\gamma_n(y)$, en déduire que

$$\forall r \geq 0, \qquad \gamma_n\big(\big\{\big|f - \textstyle\int f\, d\gamma_n\big| \geq r\big\}\big) \leq 2e^{-r^2/(4L^2)}.$$

Exercice 6. (Transport de mesure et inégalité de Bliss) On fixe $p \in]1, n[$, et on note $p^\star = np/(n-p)$ et $q = p/(p-1)$. On fixe $b > 0$ tel que la fonction $\psi_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ donnée par

$$\psi_0(r) := (b + r^q)^{-n/p^\star}$$

vérifie $\int_0^\infty \psi_0(r)^{p^\star} r^{n-1}\, dr = 1$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction Lipschitz, de support exactement $[0, A]$, et telle que $\int_0^\infty \varphi(r)^{p^\star} r^{n-1}\, dr = 1$.

1. Montrer qu'il existe une fonction T sur $[0, A[$, C^1 et strictement croissante, avec $T([0, A[) = [0, +\infty[$, telle que

$$\forall t \in [0, A[, \qquad \int_0^t \varphi(r)^{p^\star} r^{n-1}\, dr = \int_0^{T(t)} \psi_0(r)^{p^\star} r^{n-1}\, dr,$$

   et $\psi_0(r)^{p^\star} T(r)^{n-1} T'(r) = \varphi(r)^{p^\star} r^{n-1}$.

2. Montrer que pour tout $r \in]0, A[$ on a

$$\psi_0(r)^{-p^\star/n} \leq \frac{1}{n} \varphi(r)^{-p^\star/n} \frac{1}{r^{n-1}} \big(r^{n-1} T\big)'.$$

   et en déduire que

$$\int_0^A \psi_0^{p^\star(1-1/n)}(T(r)) T(r)^{n-1} T'(r)\, dr \leq \frac{p(n-1)}{n(n-p)} \int_0^A \varphi'(r)\, \varphi(r)^{p^\star/q}\, r^{n-1} T(r)\, dr.$$

3. Montrer qu'on a l'inégalité

$$\Big(\int_{\mathbb{R}_+} |\varphi'(r)|^p\, r^{n-1}\, dr\Big)^{1/p} \geq C_{n,p} := \frac{n(n-p)}{p(n-1)} \cdot \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \psi_0^{p^\star(1-1/n)}(r)\, r^{n-1}\, dr}{\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \psi_0(r)^{p^\star} r^{n-1+q}\, dr\Big)^{1/q}},$$

   et que de plus il y a égalité dans cette inégalité lorsque l'on prend $\varphi = \psi_0$ (pour cela on pourra remonter les calculs et remarquer que, dans ce cas, il y a égalité dans toutes les étapes précédentes).

4. Montrer que pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ Lipschitz, de support un segment $[0, A]$, on a

$$\frac{\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} |\varphi'(r)|^p r^{n-1}\, dr\Big)^{1/p}}{\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(r)^{p^\star} r^{n-1}\Big)^{1/p^\star}} \geq C_{n,p} = \frac{\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} |\psi_0'(r)|^p r^{n-1}\, dr\Big)^{1/p}}{\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \psi_0(r)^{p^\star} r^{n-1}\Big)^{1/p^\star}}$$