Exercices. Feuille 4.

Exercice 1. (Inégalité de Santaló) Dans la suite, u sera une direction et $H = u^\perp$. Pour simplifier les notations, on suppose que $u = e_n$ et donc pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ plutôt que d'écrire $x = P_H x + (x \cdot u)$, on écrit simplement $x = (z,t)$ avec $z \in \mathbb{R}^{n-1} \simeq H$ et $t \in \mathbb{R}$.

1. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe (borné). Montrer que

$$S_u C = \bigcup_{z \in P_H C} \{z\} \times \frac{C_z - C_z}{2} = \left\{(z,t) \; ; \; z \in P_H C, \; t = \frac{t_1 - t_2}{2}, \; t_1, t_2 \in C\right\}.$$

Dans la suite, on se donne un corps convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, par définition, un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide, et tel que $K = -K$. C'est un exercice classique de montrer que K est un corps convexe symétrique si et seulement si il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ tel que

$$K = B_{\|\cdot\|} := \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \|x\| \leq 1\}.$$

On appelle polaire de K et on note K° le corps associé à la norme duale, c'est-à-dire, par définition,

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n \; ; \; x \cdot y \leq 1, \; \forall x \in K\}.$$

Remarquez qu'on peut tout aussi bien imposer $|x \cdot y| \leq 1, \; \forall x \in K$, puisque K est symétrique. On voit que K° est encore un corps convexe symétrique.
(Remarque : il découle du théorème de Hahn-Banach que $(K^\circ)^\circ = K$.)

On notera $L = S_u K$ le symétrisé de Steiner de K dans la direction u (qui est toujours e_n).

2. Montrer que

$$K^\circ = \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \; ; \; z \cdot y + ts \leq 1, \; \forall z \in P_H K \text{ et } t \in \mathbb{R} \text{ avec } (z,t) \in K\right\}$$

et

$$L^\circ = \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \; ; \; z \cdot y + s\frac{t_1 - t_2}{2} \leq 1, \; \forall z \in P_H K \text{ et } t_i \in \mathbb{R} \text{ avec } (z,t_i) \in K, \; i = 1,2\right\}.$$

3. Pour $s \in \mathbb{R}$ et $C \subset \mathbb{R}^n$, on note $C[s] := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \; ; \; (y,s) \in C\}$. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{K^\circ[s] + K^\circ[-s]}{2} \subset L^\circ[s]$$

et en déduire que $|K^\circ[s]| \leq |L^\circ[s]|$.

4. Montrer que

$$|(S_u K)^\circ| \geq |K^\circ|.$$

5. En admettant un théorème de convergence des suites de symétrisations de Steiner, montrer le théorème suivant

Théorème. *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe symétrique. Alors, on a :*

$$|K| \; |K^\circ| \leq |D_n|^2.$$

Exercice 2. (Prékopa-Leindler multiplicatif, corps inconditionnels et inégalité Santaló) On note $P^n = (\mathbb{R}_+^*)^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_i > 0\}$ et pour $x, y \in P$ et $t \in [0,1]$, on définit $z = x^{1-t} \times y^t \in P$ par $z_i = x_i^{1-t} y_i^t$, $i = 1, \ldots, n$.

1. (Prékopa multiplicatif) Montrer que si $f, g, h : P^n \to \mathbb{R}_+$ sont tels que,
$$\forall x, y \in P^n, \qquad h(x^{1-t} \times y^t) \geq f(x)^{1-t} g(y)^t,$$
alors $\displaystyle\int_{P^n} h \geq \left(\int_{P^n} f\right)^{1-t} \left(\int_{P^n} g\right)^t.$

2. Un corps convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ est dit inconditionnel si il est invariant par les σ_{e_i}, les symétries orthogonales par rapport aux hyperplans $e_i^\perp$ de coordonné , soit encore si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in K \Longleftrightarrow (\pm x_1, \ldots, \pm x_n) \in K \Longleftrightarrow (|x_1|, \ldots, |x_n|) \in K.$$
   (a) Montrer que si K est inconditionnel, alors$|K| = 2^n |K \cap P^n|$.
   (b) Retrouver l'inégalité de Santaló $|K| \ |K^\circ| \ \leq |D_n|^2$ lorsque K est un corps convexe inconditionnel.