Exercices. Feuille 5.

Exercice 1. On fixe $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ tels que $\mathrm{Vect}(\{a_j\}) = \mathbb{R}^n$. Pour $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ on pose

$$I(A_1, \dots, A_m) = \int \prod_{j=1}^{m} 1_{A_j}(x \cdot a_i)\, dx = \big|\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \forall j \leq m,\ x \cdot a_i \in A_j\}\big|.$$

Supposons que les ensembles A_j sont bornés, et que $(A_j^k)_k \subset \mathbb{R}$ sont des suites bornés (au sens où les ensembles restent dans une certain compact) d'ensembles tels $1_{A_j^k} \to 1_{A_j}$ dans $L^1(\mathbb{R})$, pour $j = 1, \dots, m$. Montrer qu'alors $I(A_1^k, \dots, A_m^k) \to I(A_1, \dots, A_m)$.

Exercice 2. On fixe $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ et $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions log-concave paires, alors la fonction

$$t \to \int \prod_{j=1}^{m} f_j(x \cdot a_j + t b_j)\, dx$$

est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. (Dualité de formes quadratiques) Soit $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs engendrant $\mathbb{R}^n$. Etant donné $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ on considère la forme quadratique $Q(x) := Ax \cdot x = \sum \alpha_j (v_j \cdot x)^2$ associée $A := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j \otimes v_j$. On pourra remarquer que A est définie positive. Montrer que la forme quadratique duale $M(y) := \sup\{x \cdot y \ ; \ Q(x) \leq 1\} = A^{-1} y \cdot y$ vérifie

$$M(y) = \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i^2}{\alpha_i} \ ; \ y = \sum_{i=1}^{m} \theta_i\, v_i \Big\}$$

On rappelle la formule de **Cauchy-Binet** : Pour A une matrice $n \times m$, avec $m \geq n$, on a

$$\det(A^t A) = \sum_{|S|=n} \big(\det(A_S)\big)^2$$

où la somme a lieu sur les parties $S \subset \{1, \dots m\}$ de cardinal n et où A_S désigne la matrice extraite de A en ne conservant que les n colonnes d'indices dans S.

Exercice 4. Soit $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, $A := [a_1, \dots, a_m]$ la matrice $n \times m$ associé, et $c = (c_1, \dots, c_m)$ tels que $c_j > 0$ et $\sum c_j = n$. On pose, comme dans le cours,

$$D_G^2 := \sup \Big\{ \frac{\prod_{j=1}^{m} \alpha_j^{c_j}}{\det(\sum \alpha_j\, c_j\, a_j \otimes a_j)} \ ; \ \alpha_j > 0,\ j = 1, \dots m \Big\}.$$

Pour $S \subset \{1, \dots m\}$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_+)^m$ donné, on note $\alpha_S := \prod_{j \in S} \alpha_j$. Posons enfin

$$J_S := c_S \big(\det(A_S)\big)^2,$$

où A_S la matrice extraite de A en ne prenant que les colonnes dans $S \subset \{1, \dots m\}$.

1. Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_+)^m$ on note $B[\alpha] := \sum_{j=1}^m c_j \alpha_j \, a_j \otimes a_j$. Montrer que
$$\det(B[\alpha]) = \sum_{|S|=n} J_S \, \alpha_S$$

2. On suppose qu'il existe $z = (z_1, \dots, z_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m$ tel que
$$\forall j = 1, \dots m, \qquad c_j = \frac{\displaystyle\sum_{|S|=n,\, S \ni j} J_S \, z_S}{\displaystyle\sum_{|S|=n} J_S \, z_S}.$$
Montrer que la constante D_G dans BL (exprimé avec les c_j) est atteinte pour les gausiennes $g_j(t) = e^{-z_j t^2}$, c'est-à-dire
$$D_G^2 = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^m z_j^{c_j}}{\displaystyle\sum_{|S|=n} J_S \, z_S}.$$

3. **(Reformulation)** Avec les notations précédentes, on pose
$$\tilde{J}_S = (\det(A_S))^2$$
et $p_j = 1/c_j$. Montrer que s'il existe $z = (z_1, \dots, z_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m$ tel que
$$\forall j = 1, \dots m, \qquad \frac{1}{p_j} = \frac{\displaystyle\sum_{|S|=n,\, S \ni j} \tilde{J}_S \, z_S}{\displaystyle\sum_{|S|=n} \tilde{J}_S \, z_S},$$
alors la meilleure constante dans l'inégalité de BL de la forme $\int \prod f_j(a_j \cdot x) \, dx \leq D \prod \|f_j\|_{L^(p_j}$ est atteinte pour les gaulliennes $f_j(t) = e^{-z_j t^2}$ et vaut
$$D = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^m (z_j p_j)^{1/p_j}}{\displaystyle\sum_{|S|=n} \tilde{J}_S \, z_S}.$$

4. Montrer que la meilleure contante dans l'inégalité d'Young
$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C_{p,q} \, \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}$$
vaut, pour $p, q \neq 1$,
$$C_{p,q}^2 = \frac{p^{1/p} \, q^{1/q} \, r'^{1/r'}}{p'^{1/p'} \, q'^{1/q'} \, r^{1/r}}$$
avec la notation $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = 1$ pour $t \in]1, +\infty[$.

Exercice 5.

1. Soit B une matrice $n \times m$ dont les n lignes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^m$.
   (a) Montrer que
   $$\sum_{|S|=n} \big(\det(B_S)\big)^2 = 1.$$
   (b) Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots m\}$, on a
   $$\sum_{|S|=n,\ S \ni j} \big(\det(B_S)\big)^2 = |b_j|^2$$
   où $b_j \in \mathbb{R}^n$ est la $j$ème colonne de B.
2. Soit $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ des directions (i.e. $|u_j| = 1$) et $c_1, \dots, c_j > 0$ tels que
   $$\sum_{i=1}^m c_j\, u_j \otimes u_j = 1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$
   Montrer que dans ce cas
   $$D_G^2 := \sup \left\{ \frac{\prod_{j=1}^m \alpha_j^{c_j}}{\det(\sum c_j\, \alpha_j\, u_j \otimes u_j)}\ ;\ \alpha_j > 0,\ j = 1, \dots m \right\} = 1.$$

Exercice 6. *Cet exercice explique le lien entre la condition obtenue à la question 2) de l'exercice 4 et l'existence d'un changement de variable qui amène à une décomposition de l'identité. On utilisera les notations précédentes ainsi que le résultat 1.b) de l'exercice précédent.*

Montrer que s'il existe $z = (z_1, \dots, z_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m$ tel que $c_j = \dfrac{\sum_{|S|=n,\ S\ni j} J_S\, z_S}{\sum_{|S|=n} J_S\, z_S}$, alors si on écrit $\sum_{j=1}^m c_j z_j\, a_j \otimes a_j =: C^2$ avec C une matrice définie positive, on a $|C^{-1} a_j| = 1/z_j$ et donc si on pose $y_j := C^{-1} a_j$,
$$\sum_{j=1}^m c_j\, y_j \otimes y_j = \mathrm{Id}$$

Exercice 7. (Théorème et décomposition de John) Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe symétrique ; on notera $\|\cdot\|_K$ la norme associée, K° le polaire de K associé à la norme duale $\|\cdot\|_{K^\circ}$, et $B_2^2 = \{|\cdot| \leq 1\}$ la boule euclidienne. Un ellipsoïde est une image linéaire de B_2^n. On introduit la norme suivante sur les applications linéaires : pour $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,
$$\|A\| := \sup_{|x|=1} \|Ax\|_K.$$

1. On suppose que $B_2^n \subset K$.

(a) Montrer que $\partial K \cap B_2^n = \partial K \cap \partial B_2^n$.

(b) Montrer que $K^\circ \subset B_2^n$.

(c) Montrer que si $x \in \partial K \cap B_2^n$, alors $x \in \partial K^\circ$ et pour tout $y \in K^\circ$ tel que $y \neq x$ on a $x \cdot y < 1$.

2. Montrer qu'il existe un ellipsoïde de volume maximal inclus dans K. (On pourra utiliser que pour $\mathcal{E} = AB_2^n$ avec $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E} \subset K \Leftrightarrow \|A\| \leq 1$ et que $|\mathcal{E}| = \omega_n |\det A|$.)

Dans la suite, on supposera que B_2^n est l'ellipsoïde de volume maximal inclus dans K (c'est -à-dire que pour $\mathcal{E} = AB_2^n$ avec $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, si $\mathcal{E} \subset K$, soit $\|A\| \leq 1$, alors $|\mathcal{E}| \leq |B_2^n|$). *On peut s'y ramener en faisant une une transformation linéaire sur K.*

2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ on a $\|A\| \geq \left|\det(A)\right|^{1/n}$.

3. On considère $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe $x \in \partial K \cap B_2^n$ tel que

$$\|Sx\|_K \geq \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(S).$$

On pourra considérer $x_\varepsilon \in S^{n-1}$ un vecteur où l'application $\operatorname{Id} + \varepsilon S$ atteint sa norme $\|\cdot\|$ et utiliser que $(\det(I + \varepsilon S))^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(S) + o(\varepsilon)$ et étudier les différentes limites lorsque $\varepsilon \to 0$.

4. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ et $S_\varepsilon = \operatorname{Id} + \varepsilon T$.

(a) Montrer qu'il existe $x_\varepsilon \in \partial K \cap B_2^n$ et $y_\varepsilon \in \partial K^\circ$ tel que

$$\|S_\varepsilon(x_\varepsilon)\|_K = S_\varepsilon(x_\varepsilon) \cdot y_\varepsilon \qquad \text{et} \qquad T(x_\varepsilon) \cdot y_\varepsilon \geq \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(T).$$

(b) En déduire qu'il existe $x_0 \in \partial K \cap B_2^n$ tel que

$$T(x_0) \cdot x_0 \geq \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(T).$$

(c) Première application : en considérant $T = x \otimes x$ pour $x \in K$, montrer que

$$K \subset \sqrt{n} B_2^n.$$

5. Montrer que $\frac{1}{n} \operatorname{Id}$ appartient à l'enveloppe convexe de $\{u \otimes u \ ; \ u \in K \cap B_2^n\}$.
On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Hanh-Banach dans l'espace euclidien $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ muni du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}({}^t AB)$, et appliquer le (b) de la question précédente

6. En déduire le

Théorème. *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe symétrique tel que B_2^n soit l'ellipsoïde de volume maximal dans K. Alors il existe des points de contact $x_1, \dots x_m \in K \cap B_2^n$ et $c_1 \dots, c_m > 0$ tels que*

$$\sum_{i=1}^m c_i \, x_i \otimes x_i = \operatorname{Id}.$$