Exercices. Feuille 6.

Exercice 1. Pour $t > 1$ on note $t' = t/(1-t)$ son conjugué de Lebesque et $C_t := \sqrt{t^{1/t}/t'^{1/t'}}$.

1. Montrer que si g est une gaullienne centrée sur $\mathbb{R}$ et si on note $\hat{g}$ sa transformée de Fourier, alors pour $t > 1$
$$\|g\|_{L^t} = C_t^{-n}\|\hat{g}\|_{L^{t'}}.$$
2. Retrouvez que la meilleure consente dans l'inégalité de Young sur $\mathbb{R}$ est C_pC_q/C_r.
3. Montrer que l'inégalité de Young se tensorise et que la meilleure constante sur $\mathbb{R}^n$ est $(C_pC_q/C_r)^n$.

Exercice 2. (BL version gaussienne) Soit $E_1, \dots, E_m$ des sous -espaces de $\mathbb{R}^n$ et $c_1, \dots, c_m > 0$ tels que
$$\sum_{j=1}^m c_j P_{E_j} \leq \mathrm{Id}_n.$$
Soit $F_1, \dots F_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ tels que, pour $j = 1, \dots, m$, F_j ne dépend que de E_j, au sens où $F_j(x) = \tilde{F}_j(P_{E_j}x)$ pour un $\tilde{F}_j : E_j \to \mathbb{R}_+$. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m F_j^{c_j} \;\, d\gamma_n \leq \prod \Big(\int_{\mathbb{R}^n} F_j \, d\gamma_n \Big)^{c_j}.$$

Exercice 3. (Inégalité de Brascamp-Lieb sur le groupe symétrique)

Soit $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique des permutations sur $[n] := \{1, \dots, n\}$ et $E = \{f : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^{n!}$ l'espace vectoriel des fonction réelles sur $\mathcal{S}_n$. Ainsi, pour $f : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $f(\sigma)$ s'interprète comme la coordonnée σ de f dans la base canonique, i.e. $f = (f(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{S}_n}$.

On notera μ la mesure de comptage sur $\mathcal{S}_n$, normalisée de façon à obtenir une probabilité, c'est-à-dire : pour $f \in E$,
$$\int f \, d\mu = \int f(\sigma)\, d\mu(\sigma) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} f(\sigma).$$
Le produit scalaire canonique (normalisé) sera donc, pour $f, g \in E$
$$\langle f, g \rangle = \int fg \, d\mu = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} f(\sigma)g(\sigma)\,.$$

On note $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{S}_n$ l'ensemble des $n(n-1)/2$ transpositions de $[n] = \{1, \dots, n\}$, i.e. $\tau \in \mathcal{T}_n$ s'écrit $\tau = (i, j)$ avec $i, j \in [n]$. Si on introduit le support $\mathrm{supp}(\tau) = \{i \in [n] \; ; \; \tau(i) \neq i\}$, alors $\tau \in \mathcal{T}_n$ si et seulement si son support est formé d'exactement deux éléments.

Pour $\tau \in \mathcal{T}_n$ on introduit l'endomorphisme $\partial_\tau \in \mathcal{L}(E)$ définit pour $f \in E$ par
$$(\partial_\tau f)(\sigma) = f(\sigma\tau) - f(\sigma)$$

On note alors Δ (Laplacien) l'endomorphisme sur E donné par

$$\Delta f = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_n} \partial_\tau f$$

On notera enfin, pour $f \in E$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $|\partial f|^2 := \sum_{\tau \in \mathcal{T}_n} \big(\partial_\tau f(\sigma)\big)^2$.

1. Montrer que pour $f, g \in E$ on a

$$\int f \Delta g \, d\mu = - \sum_{\tau \in \mathcal{T}_n} \langle \partial_\tau f, \partial_\tau g \rangle.$$

2. Montrer que $-\Delta$ est un endomorphisme symétrique positif, dont le noyau est exactement l'espace des fonctions constantes sur $\mathcal{S}_n$.
3. Montrer que pour $f \in E$, il existe une unique famille $\{f_t : \mathcal{S}_n \to E\}_{t \geq 0}$ tel que $t \to f_t$ soit classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ (à valeurs dans E) et tel que : $f_0 = f$ et pour tout $t > 0$

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t \, .$$

Dans la suite, on notera $f_t =: P_t f$.
Donner une expression de $P_t f$ en fonction de Δ.
4. Montrer que pour tout $f \in E$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a $P_t f(\sigma) \to \int f \, d\mu$ lorsque $t \to +\infty$.
5. Montrer que pour $f \in E$ et $\tau \in \mathcal{T}_n$ on a,

$$\forall t \geq 0, \qquad \partial_\tau (P_t f) = P_t(\partial_\tau f).$$

On admettra que si f est une fonction positive sur $\mathcal{S}_n$, alors $P_t f$ l'est aussi.

6. Montrer que pour $g \in E$ on a $\Delta(g^2) = 2g\Delta g + 2|\partial g|^2$. En déduire que pour $f \in E$, la fonction $g_t := \big(P_t(f^2)\big)^{1/2}$ vérifie

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \Delta g_t + \frac{|\partial g_t|^2}{g_t}.$$

Pour $j \in [n]$ donné, on dit qu'une fonction $f \in E$ *ne dépend que de l'indice j ou que de $\sigma(j)$* si $\forall \sigma, \tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n$, $\sigma(j) = \tilde{\sigma}(j) \Rightarrow f(\sigma) = f(\tilde{\sigma})$, c'est-à-dire, s'il existe une fonction $F : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n \qquad f(\sigma) = F(\sigma(j)).$$

Notez que dans ce cas, on a, par exemple, que $\int f \, d\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F(i)$.

7. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ et $f \in E$. Montrer que f ne dépend que de $\sigma(j)$ si et seulement si pour tout $\tau \in \mathcal{T}_n$ on a
$$j \notin \mathrm{supp}(\tau) \Longrightarrow \partial_\tau f \equiv 0.$$

8. Montrer le

   Théorème. *Soit $f_1, \dots, f_n : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}_+$ tel que f_j ne dépende que de $\sigma(j)$ pour $j = 1, \dots, n$. Alors on a*
$$\int \prod_{j=1}^{n} f_j \, d\mu \leq \prod_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^2(\mu)}.$$

   On pourra étudier la fonction $\alpha(t) = \int \prod_{j=1}^{n} \left(P_t(f_j^2)\right)^{1/2} d\mu$.

9. Pour une matrice carré $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le permanent est définit par
$$\mathrm{perm}(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

   Montrer que si l'on écrit $A = [a_1, \dots, a_n]$ avec $a_i \in \mathbb{R}^n$ les colonnes de A, alors on a l'inégalité de type Hadamard suivante :
$$|\mathrm{perm}(A)| \leq \frac{n!}{n^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} |a_i| \,.$$

Exercice 4. (Les gaussiennes sont extrémales, à variance donnée, pour l'entropie et l'information de Fisher)
Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ telle que que $\int |x|^2 f(x) \, dx = n$.

1. Montrer que si f a une entropie finie, alors
$$S(f) \geq S(g_n)$$

   On pourra introduire la fonction $h = f/g_n$ et utiliser la convexité de $t \to t \log t$.

2. Montrer que si f a une information de Fisher finie, alors
$$I(f) \geq I(g_n).$$

   On pourra considérer $\int \left|x + \frac{\nabla f}{f}\right|^2 f$.