Chapitre 2

Espaces L^p abstraits

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré quelconque.

2.1 Espace $\mathcal{L}^p$ et espace L^p

Si f est une fonction mesurable à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note, pour $p \in [1, +\infty[$

$$\| f \|_p := \left(\int_E | f |^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

qu'on appelle[1] *norme* $\mathcal{L}^p$ de f, et lorsque $p = \infty$,

$$\| f \|_\infty := \inf\{a > 0 \; ; \; \mu(\{| f | \geq a\}) = 0\},$$

qu'on appelle[2] *supremum essentiel* de f. On remarquera que

$$|f| \leq \|f\|_\infty \quad \mu - pp,$$

et $\|f\|_\infty$ est la plus petite constante pour laquelle on a cette propriété. En effet, lorsque $\|f\|_\infty < +\infty$, on a $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = \mu\Big(\bigcup_{n \geq 1} \Big\{ |f| \geq \|f\|_\infty + \dfrac{1}{n} \Big\} \Big) = 0$, par convergence monotone. En particulier, pour toute partie mesurable A on a $\mu(A) = \mu(A \cap \{|f| \leq \|f\|_\infty\})$.

Definition 1 ($p \in [1, +\infty[$)**.** *On note $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, ou $\mathcal{L}^p(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $| f |^p$ est μ-intégrable, i.e. telles que $\|f\|_p < +\infty$.*

Definition 2 ($p = \infty$)**.** *On note $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{A}, \mu)$, ou $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables f à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui sont μ-*essentiellement bornées*, c'est-à-dire telles qu'il existe $a > 0$ pour lequel $\mu(\{| f | \geq a\}) = 0$, soit encore telles que $\|f\|_\infty < +\infty$.*

1. mais dont nous verrons qu'il ne s'agit en fait que d'une semi-norme
2. mais on devrait dire μ-supremum essentiel

Remarque 10. *Si on éprouve le besoin de préciser que l'on travaille avec des fonctions réelles ou des fonctions complexes, on peut ajouter "espace $\mathcal{L}^p$-réel" ou "espace $\mathcal{L}^p$-complexe".*

Remarque 11. *Dans les deux définitions ci-dessus, on peut autoriser la fonction $|f|$ à prendre la valeurs $+\infty$ (en particulier on peut considérer des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$). Cela ne change rien du point de vue de l'intégration par rapport à μ, car pour une fonction dans $\mathcal{L}^p$, cela ne peut avoir lieu que sur un ensemble de μ-mesure nulle. En effet, si p est fini, $|f|^p$ μ-intégrable entraine que $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$. Pour $p = +\infty$, si $\|f\|_\infty < +\infty$, cela veut dire qu'il existe $a > 0$ fini tel que $\mu(\{|f| \geq a\}) = 0$, et $\mu(\{|f| = +\infty\}) \leq \mu(\{|f| \geq a\})$.*

Proposition 12. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel.*

Démonstration. On montre que c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions mesurables. On remarque d'abord pour $\lambda \in K$ et $f \in \mathcal{L}^p$, on a

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p. \tag{2.1}$$

C'est évident si $p \in [1, +\infty[$. Si $p = +\infty$,

$$\begin{aligned}\| af \|_\infty &= \inf\{m > 0 : \mu(\{| af | \geq m\}) = 0\}\\ &= | a | \inf\{m' > 0 : \mu(\{| af | \geq | a |m'\}) = 0\}\\ &= | a | \inf\{m' > 0 : \mu(\{| f | \geq m'\}) = 0\} = | a | \| f \|_\infty.\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que si $f, g \in \mathcal{L}^p$, alors $f + g \in \mathcal{L}^p$. Pour $p = 1$, c'est évident à partir de l'inégalité $|f + g| \leq |f| + |g|$. Pour le cas $p = \infty$, on remarque que si $a > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ on a,

$$\begin{aligned}\mu(\{|f + g| \geq a\}) &\leq \mu(\{|f| + |g| \geq a\})\\ &= \mu\Big(\{|f| + |g| \geq a\} \cap \{|f| \leq \|f\|_\infty\} \cap \{|g| \leq \|g\|_\infty\}\Big) = \mu(\emptyset) = 0,\end{aligned}$$

et donc $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Nous sommes donc ramenés au cas $p \in]1, +\infty[$. On montre d'abord que

$$\forall a, b \in [0, +\infty], \qquad (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{2.2}$$

En effet, la fonction $x \to |x|^p$ est convexe sur $\mathbb{R}$, et donc pour $a, b \geq 0$ on a $\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p$, ce qui donne (2.2). Cela permet de voir, en l'appliquant à $a = f(x)$ et $b = g(x)$ et en intégrant sur X par rapport à $d\mu(x)$ que si les intégrales de droites sont finies, l'intégrale de gauche aussi.

□

On verra plus loin que

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Par ailleurs, si f est la fonction nulle, on a $\|f\|_p = 0$. Alors que manque-t-il à $\|\cdot\|_p$ pour être une norme sur $\mathcal{L}^p$? Pas grand chose, mais le problème vient du fait que pour $f \in \mathcal{L}^p$ on a

$$\|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \;\; \mu\text{-p.p.}$$

Cela est clair pour $p < +\infty$, puisque dire que la fonction positive $|f|^p$ a une intégrale nulle, cela veut dire qu'elle est nulle μ-pp. Pour $p = \infty$, si $\|f\|_\infty = 0$, alors $\mu(\{|f| > 0\}) = \mu(\bigcap_{n\geq 1}\{|f| \geq \frac{1}{n}\}) = 0$, par convergence monotone.

Ainsi, on veut construite un espace tel que f nulle μ-presque partout veut dire que f est le vecteur nul. Pour cela, on fait le quotient de $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence suivante :

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \;\; \mu\text{-p.p.} \Longleftrightarrow \|f-g\|_p = 0$$

Ainsi, on considère l'ensemble quotient $\mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ (que l'on notera $L^p(\mu)$) formé par les classes d'équivalences modulo $\sim$. Notez que la relation d'équivalence associée à chaque $\|\cdot\|_p$ ne dépend pas de p et est la même pour tous les espaces $\mathcal{L}^p$: la classe d'une fonction f est constituée par les fonctions qui coïncident avec f μ-presque partout.

Si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions mesurables nulles μ-presque partout, on peut aussi écrire

$$f \sim g \Longleftrightarrow f - g \in \mathcal{N}$$

Or $\mathcal{N}$ est un espace vectoriel (et un sous-espace vectoriel de tout $\mathcal{L}^p(\mu)$), et il est classique de voir que les structures d'espace vectoriel passent au quotient. En résumé :

Definition 3. *Pour $p \in [1,+\infty]$, on note $L^p(E,\mathcal{A},\mu)$, ou $L^p(\mu)$, l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence définie par l'égalité μ-p.p.*

Soit $\tilde{f} := \{g \;;\; g = f \;\mu\text{-p.p.}\}$ la classe d'équivalence de f. Les opérations classiques s'étendent aux classes d'équivalence, avec $\widetilde{af} = a\tilde{f}$ et $\widetilde{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$.

On peut également définir $\|\cdot\|_p$ sur $L^p(\mu)$ par $\|\tilde{f}\|_p = \|f\|_p$, qui ne dépend pas du représentant choisi, car $f = g$ μ-p.p. implique $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Remarque 13. *On fera systématiquement l'abus de notation qui consiste à ne pas différencier fonctions et classes d'équivalences, c'est-à-dire à utiliser le même symbole pour une fonction f et pour sa classe d'équivalence $\overline{f}$.*

C'est une question d'habitude. La seule manière de comprendre L^p, c'est de l'utiliser. En fait, sur $L^p(\mu)$ on pense plutôt "$\mathcal{L}^p(\mu)$", c'est-à-dire à des fonctions, plutôt qu'à des classes d'équivalences, mais on se souvient que les objets ne sont définis que μ-pp. Ainsi, par exemple, on a coutume de dire que deux fonctions f et g sont égales dans L^p si elles coïncident μ-pp (même si on devrait simplement dire qu'elle définissent la même classe d'équivalence dans $L^p(\mu)$).

Example 14. *On note $\ell_p(\mathbb{N})$ ou simplement ℓ_p l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, où m est la mesure de comptage. On distingue parfois les espaces réels $\ell_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$et complexes $\ell_p^{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.*

Soit $u \in \ell^p$. Si $p < \infty$, alors

$$\| u \|_p = \left(\sum_n | u_n |^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

tandis que si $p = +\infty$,

$$\| u \|_\infty = \sup_n | u_n |.$$

Il n'est pas besoin ici de quotienter $\mathcal{L}^p$ car $\| u \|_p = 0$ implique $u = 0$.

On a la même chose pour $\ell^p(\mathbb{Z}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), m)$.

2.2 Inégalité de Hölder

L'inégalité de Hölder est une inégalité de convexité simple et fondamentale sur un espace mesuré (X, μ) abstrait, qui s'exprime comme suit : pour $f, g : X \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables positives et $t \in]0, 1[$ on a

$$\int f^{1-t} g^t \, d\mu \leq \Big(\int f \, d\mu \Big)^{1-t} \Big(\int g \, d\mu \Big)^t,$$

avec égalité si $f = g$. On peut voir ce résultat comme une version intégrale et optimisée de l'inégalité arithemético-géométrique $a^{1-t} b^t \leq (1-t)a + tb$, qui exprime la concavité du logarithme.

On peut formuler ce résultat en terme de normes L^p. On rappelle que le conjugué (de Lebesgue) de $p \in [1, +\infty]$ est donné par

$$q = \frac{p}{p-1} \in [1, +\infty]$$

Théorème 15. *Soit (X, μ) un espace mesuré et $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ alors $fg \in L^1(\mu)$ et*

$$\Big| \int fg \, d\mu \Big| \leq \int |f| \, |g| \, d\mu \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)}. \tag{2.3}$$

De plus, dans le cas de fonctions réelles et $1 \leq p < +\infty$, il y a égalité dans ces deux inégalités lorsque $g(x) = |f(x)|^{p-2} \overline{f(x)}$ μ-pp (dans le cas réel, cela revient aussi à prendre $g(x) = sign(f(x)) \, |f(x)|^{p-1}$).

En particulier, on a pour $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mu)$,

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \sup_{\|g\|_{L^q(\mu)} \leq 1} \Big| \int fg \, d\mu \Big| = \sup_{g \in L^q(\mu)} \frac{\Big| \int fg \, d\mu \Big|}{\|g\|_{L^q(\mu)}}$$

La formule ci-dessus reste vraie si $p = +\infty$ et $q = 1$ lorsque la mesure μ est σ-finie.

Retenons aussi que dans la deuxième inégalité de (2.3), il y a égalité si

$$|f|^p = |g|^q \ \mu - pp.$$

À constante multiplicative près, on peut aussi montrer que le cas d'égalité donné dans le théorème, lorsque $p \in]1, +\infty[$, est le seul cas d'égalité possible, en utilisant la caractérisation des cas d'égalité dans l'inégalité de Jensen.

Démonstration. L'inégalité de Hölder peut se voir comme une conséquence de l'inégalité de Jensen, voir [Lieb and Loss, p. 46]. En voici une autre démonstration.

Soit f, g deux fonctions à valeurs dans $[0, +\infty]$. Tout d'abord, on peut supposer que $0 < \int f\, d\mu, \int g\, d\mu < +\infty$. De plus, quitte à remplacer f par $f 1_{\{f<+\infty\}}$ et g par $g 1_{\{g<+\infty\}}$, ce qui ne change pas les intégrales, on peut supposer que les fonctions sont à valeurs finies (i.e. dans $[0, +\infty[$).

On remarque que pour $t \in]0, 1[$ et $a, b \geq 0$ on a

$$a^{1-t} b^t \leq (1-t)a + tb$$

avec égalité si (et seulement si) $b = a$. C'est la concavité du logarithme. On a donc aussi, pour $\lambda > 0$,

$$a^{1-t} b^t \leq (1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}} a + t\frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}}$$

avec égalité lorsque $\lambda^{\frac{1}{1-t}} a = \frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}}$; en particulier pour $a, b > 0$ fixés, on peut trouver un $\lambda > 0$ pour lequel il y a égalité. De cela, on tire deux informations. Tout d'abord, on a

$$\inf_{\lambda>0} \left((1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}} a + t\frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}} \right) = a^{1-t} b^t$$

et d'autre part, lorsque $a, b > 0$, cet inf est un min.

Ainsi, pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in X$ on a

$$f(x)^{1-t} g(x)^t \leq (1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}} f(x) + t\lambda^{-\frac{1}{t}} g(x)$$

et donc en intégrant on trouve que pour tout $\lambda > 0$,

$$\int f^{1-t} g^t\, d\mu \leq (1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}} \int f\, d\mu + t\lambda^{-\frac{1}{t}} \int g\, d\mu.$$

En prenant l'infimum sur les $\lambda > 0$, ou trouve donc bien $\int f^{1-t} g^t\, d\mu \leq \left(\int f\, d\mu \right)^{1-t} \left(\int g\, d\mu \right)^t$.
$\square$

2.3 Inégalité de Minkowski

Théorème 16. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu$ *et* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *deux espaces mesurés* σ*-finis et* $p \in [1, +\infty[$. *Alors, pour tout fonction* f *sur* $X \times Y$ *positive mesurable (pour la tribu produit) on a*

$$\Big(\int_X \Big(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \Big)^p d\mu(x) \Big)^{1/p} \le \int_Y \Big(\int_X f(x,y)^p\, d\mu(x) \Big)^{1/p} d\nu(y).$$

De plus il y a égalité si $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$.

En particulier, si $f, g \in L^p(\mu)$, *alors*

$$\|f + g\|_{L^p(\mu)} \le \|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)}.$$

De plus il y a égalité si $g = \lambda f$ μ*-presque-partout, pour un certain* $\lambda \ge 0$.

En termes abstraits, on a $L^1(L^p) \subset L^p(L^1)$.

Démonstration. Voir [Lieb and Loss, p. 47]. □

L'inégalité triangulaire pour la norme p est valable sans l'hypothèse σ-finie (preuve directe à partir de Hölder), et pour tout $p \in [1, +\infty]$. .

On a donc bien que

$$(L^p(\mu), \| \cdot \|_{L^p(\mu)})$$

est un espace vectoriel normé.

2.4 Convergence dans L^p, densité de fonctions simples

Rappelons que la topologie usuelle d'un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ est la topologie relative à la distance $d(f, g) = \| f - g \|$. Ainsi on dira que la suite (f_n) converge (vers f) dans L^p si

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^p$ et $f \in L^p$;

b) $\lim_n \| f - f_n \|_p = 0$.

On dira aussi plus tard, parfois, que f_n tend fortement vers f dans L^p, pour faire la distinction avec la convergence faible.

On rappelle que la suite (f_n) converge simplement vers f si $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pour μ-presque tout x.

On remarque que si (f_n) converge dans $L^1(\mu)$ vers f, alors $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$. La réciproque est fausse en général.

Le théorème de convergence dominée est généralement énoncé en terme de fonction intégrable, mais on peut aussi en donner une version (équivalente) L^p.

Proposition 17. *Convergence* L^p*-dominée Soit* $p \in [1, +\infty[$. *Si* $f_n \to f$ μ*-p.p. et qu'il existe* $g \in L^p$ *tel que* $| f_n | \le g$ *pour tout entier* n, *alors* $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Cet énoncé est en général faux dans L^∞.

Démonstration. On applique le théorème de convergence dominée. En effet, $| f_n - f |^p \leq (| f_n | + | f |)^p \leq 2^p | g |^p$ μ-p.p., et par hypothèse $| g |^p$ est intégrable, donc comme $| f_n - f |^p \to 0$, μ-p.p., on a la convergence vers 0 de $\int | f_n - f |^p \, d\mu$.

$\square$

Théorème 18. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

- *Les fonctions étagées intégrables sont denses dans $L^p(\mu)$. En particulier $L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ est dense dans $L^p(\mu)$.*
- *Lorsque $X \subset \mathbb{R}^n$ est une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$ (par ex. $X = \mathbb{R}^n$), muni de la mesure de Lebesgue, on a que les fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$, à support compact, sont denses dans $L^p(X)$.*
- *Lorsque $X = \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue, on a que les fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$, à support compact inclus dans Ω, sont denses dans $L^p(\Omega)$.*

On conviendra que le support d'une fonction continue f est l'adhérence des points x tel que $f(x) \neq 0$. Être à support compact, cela veut dire être identiquement nulle en dehors d'un ensemble borné (par exemple une boule).

Démonstration. Pour une fonction étagée, être dans $L^p(\mu)$ équivaut à être intégrable. En effet, il suffit de remarquer que pour un ensemble mesurable A on a $\|1_A\|_{L^p(\mu)} = \|1_A\|_{L^1(\mu)}^{1/p}$. Étant donné une fonction f dans $L^p(\mu)$ en décomposant les parties réelles, imaginaires, puis positives et négatives, on voit, en utilisant l'inégalité triangulaire, qu'il suffit d'approcher une fonction positive par une suite de fonctions étagées. Mais si f est positive, elle est limite ponctuelle croissante d'une suite (S_n) de fonctions étagées positives. Comme $0 \leq S_n \leq f$, on voit que S_n est dans $L^p(\mu)$ (c'est donc une suite de fonctions étagées intégrables), et par le théorème de convergence dominée, cette suite converge bien vers f dabs L^p.

Supposons que $X = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue que l'on notera λ. D'après le résultat précédent, il suffit d'approcher les fonctions étagées intégrables. Par l'inégalité triangulaire, il suffit donc d'approcher les fonctions de la forme 1_A où A est une partie mesurable de mesure finie. (Remarque : en coupant par des boules $B(0, R)$ avec $R \to +\infty$, on peut se ramener au cas où A est de plus borné.)

Soit donc A un ensemble mesurable de mesure finie et $\varepsilon > 0$ quelconque. D'après la régularité de la mesure de Lebesgue, il existe un compact K et un ouvert U avec $K \subset A \subset U$ et $\lambda(U \backslash K) \leq \varepsilon$. D'après le lemme Urysohn (cas continu, qui est facile), il existe une fonction continue à support compact $f : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ avec f qui vaut 1 sur K et 0 en dehors de U. On a alors

$$\int |1_A - f|^p \, d\lambda = \int_{U \backslash K} |1_A - f|^p \, d\lambda \leq \lambda(U \setminus K) \leq \varepsilon.$$

On peut remplacer $X = \mathbb{R}^n$ par X n'importe quelle partie mesurable de $\mathbb{R}^n$ munie de la mesure de Lebesgue. Si $f \in L^p(X)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction g continue sur $\mathbb{R}^n$ à support compact telle que

$$\|f - g\|_{L^1(X)} \leq \varepsilon.$$

Il suffit de prolonger f en zéro en dehors de X.

Supposons enfin que $X = \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On va faire une troncature supplémentaire. D'après le résultat précédent, il suffit de montrer que les fonctions continues à support compact inclus dans Ω sont $L^p(\Omega)$-denses dans les fonctions continues à support compact. Soit donc g continue à support compact $K \subset \mathbb{R}^n$. On peut écrire Ω comme réunion dénombrable croissante de compacts inclus dans Ω, $\Omega = \bigcup_n K_n$. D'après le lemme d'Urysohn, il existe J_n une fonction continue à valeurs dans $[0,1]$, valant 1 sur K_n, à support compact inclus dans Ω. Considérons la suite

$$g_n = g \times J_n.$$

On a alors $g - g_n = g(1 - J_n)$ et

$$\|g - g_n\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \|g\|_\infty \int_{K \cap (\Omega \setminus K_n)} (1 - J_n)^p \leq \|g\|_\infty \lambda((K \cap \Omega) \setminus K_n),$$

et par convergence montonone (décroissante, valable car les ensembles sont de mesures finies), $\lambda((K \cap \Omega) \setminus K_n) \to \lambda(\emptyset) = 0$.

□

Une conséquence importante de la densité des fonctions continues à support compact est le résultat suivant sur l'action des translations. Pour $y \in \mathbb{R}^d$ et f mesurable, on note $\tau_y(f)$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad \tau_y(f)(x) = f(x - y).$$

Théorème 19. *Soit* $1 \leq p < +\infty$ *et* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *fixé. L'application*

$$y \to \tau_y(f)$$

de $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ *dans* $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$ *est uniformément continue.*

Démonstration. Voir TD. □

2.5 Complétude de L^p, extraction de sous-suites convergeant simplement

On va démontrer les résultats suivants.

Théorème 20. *Soit* $p \in [1, +\infty]$ *et* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Alors* $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ *est un espace complet (c'est donc un espace de Banach).*

Proposition 21 (Extraction d'une sous-suite convergeant simplement)**.** *Soit* $p \in [1, +\infty]$. *Soit* (f_n) *une suite convergeant dans* $L^p(\mu)$ *vers une fonction* f. *Alors, il existe une suite extraite* $(f_{n_k})_k$ *de* (f_n) *tel que*

1. *f_{n_k} converge vers f μ-p.p.*
2. *pour tout $k \geq 0$ on a $|f_{n_k}| \leq F$ μ-pp pour une certaine fonction $F \in L^p(\mu)$.*

Dans le cas $p = +\infty$, on a bien sûr beaucoup mieux : $f_n \to f$ uniformément en dehors d'un ensemble négligeable (en particulier, $f_n \to f$ μ-p.p., pas besoin de sous-suite).

Démonstration. La stratégie va être de montrer ces deux résultats d'un seul coup. On se donne donc une suite de Cauchy (f_n) de $L^p(\mu)$ (rappelons qu'une suite convergente est de Cauchy). On va montrer que pour cette suite de Cauchy, on peut construire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ et une fonction f qui vérifient les deux points 1) et 2) de la proposition précédente. Alors, par le théorème de convergence dominée (du moins dans le cas où $p < +\infty$), cette sous-suite va converger vers f, et donc la suite de Cauchy (f_n) convergera aussi vers f.

Le caractère de Cauchy nous permet de trouver une sous-suite (f_{n_k}) tel que

$$\forall k \geq 0, \qquad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}.$$

Posons alors

$$u_0 = f_{n_0}, \qquad \text{et pour } k \geq 1 \;\; u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}},$$

de sorte que pour $N \geq 0$, la somme partielle vérifie

$$U_N := u_0 + u_1 + \ldots + u_N = f_{n_N}.$$

On se demande donc si la série $\sum u_k$ converge dans $L^p(\mu)$ et aussi ponctuellement, et si les sommes partielles sont majorées par une fonction dans L^p.

Posons, pour (presque tout) $x \in E$, et $N \geq 0$,

$$V_N(x) = \sum_{k=0}^{N} |u_k(x)|.$$

Pour x fixé, c'est une suite croissante qui converge vers une limite que l'on note $V(x)$:

$$V(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)| \in [0, +\infty].$$

La suite croissante $V_N(x)^p$ converge elle vers $V(x)^p$ lorsque $N \to +\infty$ (en convenant que $(+\infty)^p = +\infty$) et comme

$$\int V_N(x)^p \, d\mu(x) = \Big\| \sum_{k=0}^{N} |u_j| \Big\|_p^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{N} \|u_j\|_p \Big)^p \leq \Big(\|f_{n_0}\|_p + \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \Big)^p =: M < +\infty,$$

on a par convergence monotone

$$\int V(x)^p \, d\mu(x) \leq M < +\infty.$$

Cela force l'ensemble $\mathcal{N} := \{V^p = +\infty\} = \{V = +\infty\}$ à être de mesure nulle. Pour $x \notin \mathcal{N}$, on a

$$V(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)| < +\infty,$$

ce que veut dire que la série dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\sum u_k(x)$ est elle aussi convergente, car absolument convergente ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets). Pour $x \notin \mathcal{N}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_j(x) = \lim_{N\to+\infty} U_N(x) = \lim_{N\to+\infty} f_{n_N}(x)$$

la somme de cette série convergente. On peut poser $f(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{N}$, si on veut, mais ce n'est pas nécessaire si on raisonne μ-pp. Notez que f est une fonction mesurable comme limite simple (presque partout) d'une suite de fonctions mesurables. Par ailleurs, on a μ-pp, par convergence simple,

$$|f|^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\Big)^p = V^p$$

et donc $f \in L^p(\mu)$.

On a que U_N converge simplement vers f et $|U_N| \leq V_N \leq V$. Comme $V \in L^p(\mu)$, on a $U_N = f_{n_N}$ qui converge vers f dans L^p,par convergence dominée dans $L^p(\mu)$ lorsque $p < +\infty$ (dans le cas $p = +\infty$, c'est plus direct, puisqu'on a une majoration uniforme du reste). On a donc bien montré que la sous-suite (f_{n_k}) convergeait dans $L^p(\mu)$ et avait les propriétés souhaitées.

$\square$

Example 22. *Dans le cas de l'espace ℓ^p (pour $p < \infty$), une suite (de fonctions, aussi appelées suites ici...) $(u^{(n)})$ converge vers $u \in \ell^p$ si $\sum_k |\, u_k^{(n)} \,|^p < \infty$, si $\sum_k |\, u_k \,|^p < \infty$ et si*

$$\lim_n \sum_k |\, u_k^{(n)} - u_k \,|^p = 0.$$

Ceci implique en particulier que $u_k^{(n)} \longrightarrow u_k$ lorsque $n \to \infty$. En conclusion, dans l'espace ℓ^p (vrai aussi si $p = +\infty$),

$$f_n \xrightarrow{\ell^p} f \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \to f \quad \textit{simplement (partout).}$$

Évidemment, on n'a pas la réciproque, comme on peut le voir sur le contre-exemple $u^{(n)} = \mathbb{1}_{\{n\}}$. Alors la suite $(u^{(n)})$ converge simplement vers la fonction nulle car $u_k^{(n)} = 0$ pour tout $k > n$. Néanmoins pour tout n, la fonction $u^{(n)}$ est à distance 1 de la fonction nulle : $\|\, u^{(n)} - 0 \,\|_p = (\sum_k |\, u_k^{(n)} \,|^p)^{1/p} = 1$ pour tout p (même $p = \infty$), et donc ne converge pas vers la suite nulle dans ℓ^p. Ici la plus petite fonction dominant la suite $(u^{(n)})$ est la fonction v constante à 1. Pour $p < \infty$, cette fonction n'est pas dans ℓ^p, donc on ne peut pas appliquer la convergence L^p-dominée. De plus, $v \in \ell^\infty$, ce qui montre aussi que la Proposition 17 n'est pas valide en général pour $p = \infty$.

Corollaire 23. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Si l'on a la convergence de la suite (f_n) vers f dans L^p et vers g μ-p.p. alors f et g sont égales μ-p.p.*

Démonstration. On sait qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge μ-p.p. vers f. Or la suite (f_n) converge μ-p.p. vers g, donc la sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ également. Ainsi $f = g$ μ-p.p. □

2.6 Uniforme convexité

Théorème 24 (Inégalité de Hanner). *Soit $f, g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Lorsque $p \in [1, 2]$ on a les inégalités*

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geq \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)^p + \big|\|f\|_p - \|g\|_p\big|^p \tag{2.4}$$

et

$$\big(\|f+g\|_p + \|f-g\|_p\big)^p + \big|\|f+g\|_p - \|f-g\|_p\big|^p \leq 2^p\big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\big) \tag{2.5}$$

Lorsque $2 \leq p < +\infty$, les deux inégalités ci-dessus sont renversées.

Quelques remarques sur ce résultat qui peut sembler technique. Tout d'abord, les deux inégalités sont équivalentes : on passe de (2.4) à (2.5) en remplaçant f par $f+g$ et g par $f-g$. Ensuite, on remarque que ces inégalité sont une égalité lorsque $p = 2$: c'est l'identité du parallélogramme sur un espace (pré)-hilbertien. Dans le cas $p = 1$, ça découle directement de l'inégalité triangulaire.

Pour voir le contenu géométrique, supposons que $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$. On est donc sur la sphère unité de $L^p(\mu)$. On a $\|\frac{f+g}{2}\|_p \leq 1$ par l'inégalité triangulaire (i.e. par la convexité de la norme). Mais cette inégalité est stricte lorsque $f \neq g$, c'est à dire que la norme est strictement convexe. Mieux, on peut quantifier cette stricte convexité. C'est à cela que fait référence la notion d'uniforme convexité. Supposons que $\|f-g\|_p$ est petit (seul le comportement lorsque $\|f-g\|_p \to 0$ compte). Prenons $\|f-g\|_p \leq 2^{1-1/p}$, ce qui entraine $\|f+g\|_p \geq 2^{1-1/p}$, d'après (2.4) (ou simplement par convexité). On vérifie que pour des réels $0 < b < a$ on a

$$(a+b)^p + (a-b)^p \geq 2a^p + p(p-1)a^{p-2}b^2.$$

C'est l'uniforme convexité de la fonction $t \to |t|^p$; l'inégalité ci-dessus peut se démontrer directement en dérivant en b, ou bien en faisant deux développements de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral en a, sur $[a-b, a]$ et $[a, a+b]$. L'inégalité (2.5) implique alors que

$$2\|f+g\|_p^p + p(p-1)\|f+g\|_p^{p-2}\|f-g\|_p^2 \leq 22^p.$$

En utilisant que $\|f+g\|_p \leq 2$, on voit que

$$1 - \Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_p^p \geq \frac{1}{2\,2^p}p(p-1)2^{p-2}\,\|f-g\|_p^2.$$

Enfin, on peut utiliser la convexité de $s \to s^p$ et écrire que pour $s \in [0,1]$ on a $s^p \geq 1 - p(1-s)$, d'où

Théorème 25 (Uniforme convexité de L^p pour $1 < p \leq 2$)**.** *Soit* $p \in]1, 2]$ *et* $f, g \in L^p(\mu)$ *avec* $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ *et* $\|f - g\| \leq \sqrt{2}$. *Alors*

$$1 - \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \geq c_p \, \|f - g\|_p^2,$$

avec $c_p = \frac{1}{8}(p-1) > 0$.

Demonstration du Théorème 24. Cela découle du lemme suivant 1-dimensionnel suivant :

Lemme 26. *Pour* $r \in [0, 1]$ *on pose*

$$\alpha(r) = (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}$$

et

$$\beta(r) = \frac{(1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}}{r^{p-1}}.$$

Lorsque $p \in]1, 2[$ *on a, pour tout* $A, B \in \mathbb{C}$,

$$\alpha(r)|A|^p + \beta(r)|B|^p \leq |A + B|^p + |A - B|^p,$$

avec égalité lorsque $0 < B \leq A$ *et* $r = \frac{B}{A}$.
Lorsque $p \in]2, +\infty[$, *c'est pareil dans l'autre sens.*

Admettons ce lemme et finissons la preuve du théorème. Supposons que $p \in]1, 2[$ et que $\|g\|_p \leq \|f\|_p$. On a pour tout $r \in [0, 1]$ et pour (presque) tout $x \in X$,

$$\alpha(r)|(f(x)|^p + \beta(r)|g(x)|^p \leq |f(x) + g(x)|^p + |f(x) - g(x)|^p.$$

On intègre par rapport à $d\mu(x)$, et on optimise ensuite en r (i.e. on choisit $r = \frac{\|g\|_p}{\|g\|_p}$). On obtient ainsi exactement (2.4). $\square$

Il reste donc à établir le lemme ci-dessus.

Démonstration du Lemme 26. Soit donc $1 < p < 2$. Je vais me contenter de traiter le cas où A et B sont réels. Les changements $A \to -A$ ou $B \to -B$ ne changeant pas l'inégalité, on peut se ramener au cas où $A, B > 0$. Par ailleurs, on a

$$\forall r \in [0, 1], \qquad \beta(r) \leq \alpha(r).$$

Pour le voir, on peut remarquer que la fonction $h(r) = \alpha(r) - \beta(r)$ est nulle en 1 et sa dérivée vaut $h'(r) = -(p-1)\big(r^{1-p} + 1\big)\big[(1-r)^{p-2} - (1+r)^{p-2}\big] \leq 0$, ce qui montrer que $h \geq 0$. Ainsi, il suffit d'étudier la pire des situation, à savoir $A < B$. (On peut invoquer que si $0 < x \leq y$ et $0 < A \leq B$, alors $xB + yA \leq xA + yB$, puisque $(y - x)(B - A) \geq 0$).

On se donne donc $0 < A < B$ et on souhaite savoir si pour tout $r \in [0, 1]$ on a

$$\alpha(r)A^p + \beta(r)B^p \leq (A + B)^p + (A - B)^p.$$

En utilisant l'homogénéité (on divise par A^p), on voit qu'il suffit de montrer que pour $R \in]0,1[$ fixé, on a, pour la fonction

$$F_R(r) := \alpha(r) + R^p \beta(r)$$

que pour tout $r \in [0,1]$,

$$F_R(r) \leq (1+R)^{p-1} + (1-R)^{p-1}$$

avec égalité si $r = R$. Le fait qu'on a effectivement $F_R(R) = (1+R)^{p-1} + (1-R)^{p-1}$ est un calcul immédiat. Pour montrer la majoration pour tout r, on étudie la fonction. On a

$$F_R'(r) = (p-1)\big((1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}\big)\Big[1 - \Big(\frac{R}{r}\Big)^p\Big]$$

et donc F croissante sur $[0,R]$ et décroissante sur $[R,1]$, ce qui est le résultat voulu.

□

2.7 Régularité la norme

Proposition 27. *Soit (X,μ) un espace mesuré et $p \in]1,+\infty[$. On se donne deux fonctions $f, g \in L^p$ (à valeurs complexes). Alors la fonction*

$$N(t) = \int |f(x) + tg(x)|^p \, d\mu(x)$$

est dérivable en 0^+ avec

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0^+} N = \Re\Big\{p \int |f(x)|^{p-2}\overline{f(x)}\, g(x)\, d\mu(x)\Big\}.$$

Démonstration. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ la fonction $\mathbb{R} \ni t \to |\alpha + t\beta|^p$ est dérivable en $t = 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned} |\alpha + t\beta|^p = \Big[|\alpha|^2 + t^2|\beta|^2 + 2t\Re(\alpha\overline{\beta})\Big]^{p/2} &= |\alpha|^p\Big[1 + 2t\frac{\Re(\alpha\overline{\beta})}{|\alpha|^2} + t^2\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}\Big]^{p/2} \\ = |\alpha|^p\Big[1 + (p/2)\,(2t)\frac{\Re(\alpha\overline{\beta})}{|\alpha|^2} + o(t)\Big] &= |\alpha|^p + 2t\frac{p}{2}|\alpha|^{p-2}\Re(\alpha\overline{\beta}) + o(t) \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction est dérivable en zero de dérivée égale à $2\frac{p}{2}|\alpha|^{p-2}\Re(\alpha\overline{\beta})$. Pour passer à la limite, on remarque que pour $t \in]0,1[$ et pour (presque tout) $x \in X$ on a

$$|f(x)|^p - |f(x) - g(x)|^p \leq \frac{1}{t}\big[|f(x) + tg(x)|^p - |f(x)|^p\big] \leq |f(x) + g(x)|^p - |f(x)|^p.$$

En effet, la fonction $s \to s^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et donc

$$|f(x) + tg(x)|^p = |(1-t)f(x) + t(g(x) + f(x))|^p \leq (1-t)|f(x)|^p + t|g(x) + f(x)|^p$$

et donc
$$\frac{1}{t}\left[|f(x)+tg(x)|^p-|f(x)|^p\right]\le -|f(x)|^p+|f(x)+g(x)|^p.$$
Pour l'autre sens, on remarque que
$$|f(x)|^p=\left|\frac{t}{1+t}(f(x)-g(x))+\frac{1}{1+t}(f(x)+tg(x))\right|^p\le\frac{t}{1+t}|f(x)-g(x)|^p+\frac{1}{1+t}|f(x)+tg(x)|^p;$$
ce qui est le résultat voulu.

On peut donc conclure par le théorème de convergence dominée lorsque $t\to 0^+$. □

2.8 Projection sur un ensemble convexe

Le résultat suivant est très utile, en remplacement de Hahn-Banach.

Théorème 28. *Soit $1<p<+\infty$ et $\mathcal{K}$ un ensemble convexe fermé de $L^p(\mu)$. Alors pour $f\in L^p(\mu)$, il existe $h_0\in\mathcal{K}$ tel que*
$$\|f-h_0\|_p=d(f,\mathcal{K})=\inf\{\|f-h\|_p\ ;\ h\in\mathcal{K}\}.$$
De plus, pour toute fonction $h\in\mathcal{K}$ on a
$$\Re\int(h-h_0)\left[\overline{(f-h_0)}|f-h_0|^{p-2}\right]d\mu\le 0.$$

Démonstration. Voir [Lieb and Loss, p. 53].

□

2.9 Le dual de L^p

Soit $L^p(\mu)^*$ le dual (sous-entendu topologique) de $L^p(\mu)$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $L^p(\mu)$, soit encore l'espace des application linéaires ℓ de $L^p(\mu)$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour lesquelles on a
$$\forall f\in L^p(\mu),\qquad |\ell(f)|\le M\|f\|_{L^p(\mu)},$$
pour un certain $M>0$. Cet espace est lui même un espace vectoriel normé, avec la norme
$$\|\ell\|_{L^p(\mu)^*}:=\sup_{f\in L^p}\frac{|\ell(f)|}{\|f\|_{L^p(\mu)}}.$$
Un résultat classique (dont nous n'avons pas besoin) dit que muni de cette norme l'espace dual est un Banach. Nous allons voir que pour $p\in[1,+\infty[$, on peut identifier $L^p(\mu)^*$ et $L^q(\mu)$, avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, l'identification étant $g\leftrightarrow\ell_g$ où $\ell_g(f)=\int fg\,d\mu$.

On a déjà vu un aspect essentiel de la dualité $L^p - L^q$, avec $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, à savoir l'inégalité de Hölder :

$$\Big| \int fg \, d\mu \Big| \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)},$$

avec égalité si $g(x) = |f(x)|^{p-1} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}$, car qui qui donne que pour $p \in [1, +\infty]$ et $f \in L^p(\mu)$ (on suppose que l'espace est σ-fini dans le cas $p = +\infty$),

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \sup_{\|g\|_{L^q(\mu)} \leq 1} \Big| \int fg \, d\mu \Big| = \sup_{g \in L^q(\mu)} \frac{\big| \int fg \, d\mu \big|}{\|g\|_{L^q(\mu)}}.$$

On a donc déjà l'observation cruciale suivante, que l'on utilise souvent : pour estimer la norme L^p, il suffit de tester contre des fonctions dans L^q.

L'inégalité de Hölder (vue plutôt sous l'angle $L^q - L^p$) nous dit aussi que pour $g \in L^q(\mu)$ fixée, l'application

$$\begin{aligned} \ell_g : L^p(\mu) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow \ell_g(f) := \int_E fg \, d\mu \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue, dont la norme vaut $\|g\|_{L^q(\mu)}$, $q \in]1, +\infty]$ (dans le cas $q = +\infty$, on suppose que l'espace est σ-fini). Ainsi, on a une application linéaire

$$\begin{aligned} \ell : L^q(\mu) &\longrightarrow L^p(\mu)^* \\ g &\longrightarrow \ell_g \end{aligned}$$

et cette application linéaire préserve la norme

$$\|\ell_g\|_{L^p(\mu)^*} = \|g\|_{L^q(\mu)},$$

C'est une isométrie, et en particulier c'est une application linéaire continue injective. On va voir qu'elle est aussi surjective : c'est donc une bijection isométrique.

Théorème 29 (Riesz)**.** *Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$ (dans le cas $p = 1$, on supposera en plus que μ est σ-fini). Soit ℓ une forme linéaire continue sur $L^p(\mu)$. Alors $\exists! \varphi \in L^q(\mu)$ tel que $\ell = \ell_\varphi$, c'est-à-dire tel que*

$$\text{pour tout } f \in L^p(\mu), \qquad \ell(f) = \int_E f\varphi \, d\mu.$$

Démonstration. Voir [Lieb and Loss, p. 61].

Remarque 30 (Crochet de dualité)**.** *L'application*

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle : L^p(\Omega)\times L^q(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}\\ (f,g) &\longrightarrow \langle f,g\rangle := \int f g\, d\mu\end{aligned}$$

est une application bilinéaire, qui est continue. En particulier, si $f_n \to f$ dans L^p et $g_n \to g$ dans L^q alors

$$\langle f_n, g_n\rangle = \int f_n g_n\, d\mu \longrightarrow \int f g\, d\mu = \langle f, g\rangle.$$

□

2.10 Convergence faible

Par définition, si (f_n) est une suite convergeant dans $L^p(\mu)$ vers f, alors pour tout $\ell \in L^p(\mu)^*$ on a par définition de la continuité,

$$\ell(f_n) \to \ell(f).$$

Cela suggère la définition suivante :

Definition 4. *Une suite (f_n) de $L^p(\mu)$ converge* faiblement *vers $f \in L^p(\mu)$ si pour tout $\ell \in L^p(\mu)^*$ on a, lorsque $n \to +\infty$,*

$$\ell(f_n) \to \ell(f).$$

On écrit alors $f_n \rightharpoonup f$.

Il est souvent commode de faire des estimation linéaires $\ell(f)$ pour connaitre f. Les deux questions suivantes sont donc naturelles :

1. connaitre tous les $\ell(f)$ suffit-il à connaitre f ?
2. la convergence des $\ell(f_n)$ vers $\ell(f)$ assure-t-il la convergence dans L^p ? Plus généralement, quels sont les liens entre convergence faible et forte.

La réponse à la première question est simple et découle des cas d'égalités dans Hölder (ce qui nous permet de nous passer de Hahn-Banach). En effet, pour $p < +\infty$, $\|f\|_p = \sup_{\|\ell\|_{L^p(\mu)^*}\leq 1} |\ell(f)|$ (et pour $p = +\infty$?) et donc

Proposition 31. *Soit $f \in L^p(\mu)$ tel que pour tout $\ell \in L^p(\mu)^*$ on ait*

$$\ell(f) = 0$$

Alors $f = 0$ (la fonction nulle μ-pp). En conséquence, il y a unicité de la limite faible lorsqu'elle existe.

Passons à la deuxième question. En général, une convergence faible $f_n \rightharpoonup f$ n'entraine pas la convergence "forte" (i.e. dans $L^p(\mu)$). Les situations où ce type de phénomène a lieu sont les suivantes (le cas $p = 1$ est assez différent des cas $p > 1$) :

1. La suite est faite de fonctions de plus en plus oscillantes. L'exemple typique est $f_k(x) = \sin(kx)$ dans $L^p([0, 1])$. C'est la situation principale dans le cas $p = 1$).
2. La suite va vers un Dirac. Par exemple $f_k(x) = k^{1/p} g(kx)$ dans $L^p(\mathbb{R})$ pour une fonction $g \in L^p(\mathbb{R})$ fixée (continue à support compact, typiquement) .
3. La masse part à l'infini. Par exemple $f_k(x) = g(x + k)$ avec g une fonction bornée à support compact.

On a cependant le résultat suivant.

Proposition 32 (Semi-continuité inférieure faible de la norme et condition suffisante)**.** *Soit $p \in [1, +\infty]$ et (X, μ) un espace mesuré (dans le cas $p = +\infty$ on fera l'hypothèse supplémentaire que l'espace est σ-fini). Si f_n est une suite qui converge faiblement dans $L^p(\mu)$ vers f, $f_n \rightharpoonup f$, alors*

$$\liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_p \geq \|f\|_p.$$

De plus, lorsque $1 < p < +\infty$, si on sait aussi que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, alors la suite f_n converge fortement vers f dans $L^p(\mu)$.

Démonstration. Voir [Lieb and Loss, p. 57].

□

Ensuite, on remarque que les suites faiblement convergentes sont bornées en norme. On a même mieux, à savoir le théorème de Banach-Steinhaus, dont on va établir directement le cas particulier suivant.

Théorème 33 (Principe de bornitude uniforme)**.** *Soit (f_n) une suite de $L^p(\mu)$ tel que pour tout $\ell \in L^p(\mu)^*$ on a que la suite $(\ell(f_n))_n$ est bornée (comme suite de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors la suite (f_n) est bornée dans $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$, i.e. pour tout n, $\|f_n\| \leq C$, pour un certain $C > 0$.*

Démonstration. Voir [Lieb and Loss, p. 58].

□

Nous verrons plus loin le résultat positif crucial concernant la convergence faible.

Une petite observation utile est que pour s'assurer de la convergence faible (d'une suite bornée en norme), il suffit de tester sur une partie dense du duale.

Lemme 34. *Soit $p \in [1, +\infty[$, et S une partie dense (pour la norme duale) de $L^p(\mu)^*$ et soit (f_n) une suite de $L^p(\mu)$ bornée.*

1. *Pour $f \in L^p(\mu)$ on a $f_n \rightharpoonup f$ si et seulement si*

$$\forall \xi \in S, \qquad \xi(f_n) \to \xi(f)$$

lorsque $n \to +\infty$.

2. *Ici $1 < p < +\infty$. Si pour tout $\xi \in S$ la suite $\xi(f_n)$ converge, alors la suite (f_n) converge faiblement, c'est à dire il existe $f \in L^p(\mu)$ tel que $\forall \ell \in L^p(\mu)^*$, $\ell(f_n) \to \ell(f)$).*

Démonstration. On note $C = \max(\sup \|f_n\|_p, \|f\|_p) < +\infty$, par hypothèse. Soit $\ell \in L^p(\mu)^*$ quelconque et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\xi \in S$ tel que $\|\xi - \ell\|_{L^p(\mu)^*} \leq \frac{1}{C}\varepsilon$. Pour ce ξ, il existe un rang N tel que si $n \geq N$ alors $|\xi(f_n - f)| \leq \varepsilon$. Alors, si $n \geq N$,

$$|\ell(f - f_n)| \leq |(\ell - \xi)(f - f_n)| + |\xi(f - f_n)| \leq \varepsilon\|f - f_n\| + \varepsilon \leq 3\varepsilon.$$

Pour le deuxième point, comme on a pas encore identifié de limite faible dans $L^p(\mu)$, on utilise le critère de Cauchy. On en déduit facilement, par densité, que pour tout $\ell \in L^p(\mu)^*$ fixé, la suite $\ell(f_n)$ est de Cauchy et donc convergente.

Ainsi, nous avons réduit le problème à la question intéressante suivante : si on sait que pour tout $\ell \in L^p(\mu)^*$ la suite $\ell(f_n)$ converge, peut-on en déduire que la suite (f_n) est faiblement convergente. Le problème est de trouver le $f \in L^p(\mu)$ qui serait la limite. Définissons, la fonction $\varphi : L^p(\mu)^* \to \mathbb{C}$ par

$$\varphi(\ell) = \lim_{n_+\infty} \ell(f_n), \qquad \ell \in L^p(\mu)^*.$$

Par existence et linéarité de limite, φ est une forme linéaire, qui de plus est continue, puisque que $|\ell(f_n)| \leq \|\ell\|_{L^p(\mu)^*}\|f_n\|_{L^p(\mu)}$ et comme la suite (f_n) est bornée, il existe $C > 0$ tel que $|\ell(f_n)| \leq C\|\ell\|_{L^p(\mu)^*}$ et par passage à la limite

$$|\varphi(\ell)| \leq C\|\ell\|_{L^p(\mu)^*} \qquad \forall \ell \in L^p(\mu)^*.$$

Ainsi φ est une forme linéaire continue sur $L^p(\mu)^* = L^q(\mu)$, et par le théorème de dualité, on sait qu'il existe $f \in L^p(\mu)$ tel que $\varphi(\ell) = \int f\ell\, d\mu$.

□

2.11 Sous-suite faiblement convergente d'une suite bornée

On arrive enfin à l'énoncé du théorème de Banach-Alaoglu dans L^p. Ici faible=préfaible lorsque $p \in]1, +\infty[$ puisqu'alors l'espace $L^p(\mu)$ est réflexif.

Théorème 35. *Soit $1 < p < +\infty$ et $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $L^q(\mu)$ soit séparable ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Si (f_n) est une suite bornée dans $L^p(\mu)$, alors existe une sous-suite (f_{n_k}) de (f_n) et $f \in L^p(\mu)$ tel que vers (f_{n_k}) converge faiblement vers f, i.e. pour tout $g \in L^q(\mu)$,*

$$\int f_{n_k}\, g\, d\mu \to \int f g\, d\mu$$

lorsque $k \to +\infty$.

Démonstration. Voir [Lieb and Loss, p. 68] □

Remarque 36. *Si X est une partie mesurable de $/R^n$ muni de la mesure de Lebesgue, alors $L^r(X)$ est séparable pour tout $p \in [1, +\infty[$. En effet, on montre que $(C_c(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p(X)})$ est séparable, et cet espace est lui-même dense dans $L^p(X)$.*