Chapitre 3

Espaces $L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, et convolution

Dans ce chapitre, on travaille avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, et la tribu des boréliens (ou sa complétée, formée des ensemble Lebesgue mesurables).

Commençons par quelques notations. L'espaces $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions mesurables (modulo l'égalité presque-partout) qui sont intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ (ou de manière équivalente sur tout ensemble mesurable de mesure finie). De même, pour $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $L^1_{loc}(\Omega)$ désigne les fonction mesurables f tel que $\int_K |f| < +\infty$ pour tout compact $K \subset \Omega$. Lorsque Ω est ouvert, on peut se contenter de prendre des boules fermées incluses dans Ω (à la place des compacts), bien sûr.

On rappellera aussi la notation $\partial^\alpha f$ pour un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Par exemple, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \partial^{(1,0,\ldots,0)} f$.

3.1 Fonctions convolables, convolution

Si f et g sont deux fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}^d$, alors on peut définir, à l'aide de Fubini-Tonelli, $f * g$ par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pour des fonctions à valeur réelles ou complexes, il faut être plus prudent.

Definition 5 (Fonctions convolables et convolée)**.**

1. *Deux fonctions mesurables (i.e. boréliennes) f et g sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs réelles ou complexes sont dites* convolables *si pour presque-tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \to f(y)g(x-y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)||g(x-y)|\, dy = |f| * |g|(x) < +\infty$$

2. *Si f et g sont deux fonctions convolables, alors on peut définir, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y)\, dy$$

et la fonction $f * g$ s'appelle la convolée de f et g.

Example 37. 1. *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et g est continue à support compact, alors f et g sont convolables. En effet, si g est nulle en dehors d'une certaine boule $B \subset \mathbb{R}^d$, on a*

$$\begin{aligned}
|\, f \,| * |\, g \,|(x) &= \int |\, f(x-y) \,| . |\, g(y) \,|\, \mathbb{1}_{\{|\, g \,| \leq \|\, g \,\|_\infty\}}\, \mathbb{1}_{\{|\, g \,| \neq 0\}}\, dy \\
&\leq \|\, g \,\|_\infty \int |\, f(x-y) \,|\, \mathbb{1}_{\{|\, g \,| \neq 0\}}\, dy \\
&\leq \|\, g \,\|_\infty \int_B |\, f(x-y) \,|\, dy \\
&= \|\, g \,\|_\infty \int_{x-B} |\, f \,|\, d\lambda,
\end{aligned}$$

qui est fini car $x - B$ est borné (donc inclus dans une certaine boule).

2. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors f et $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$ sont convolables, et $f * \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$ est constante et vaut*

$$f * \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x) = \int f\, d\lambda, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 38. *Le produit de convolution des fonctions boréliennes jouit des propriétés suivantes : soit f et g deux fonctions convolables sur $\mathbb{R}^d$, alors*

1. *pour presque tout x,*
$$f * g(x) = g * f(x),$$
2. *dire que les fonctions f et g sont convolables équivaut à dire les fonctions $|f|$ et $|g|$ sont convolables, et pour presque tout x on a*
$$|f * g(x)| \leq |f| * |g|(x).$$
En particulier, les questions d'intégralité de $f*g$ se ramènent au cas de la convolution de fonctions positives $|f|$ et $|g|$.
3. *la fonction $f * g$ est borélienne.*

Démonstration. 1. Soit x_0 fixé un point où $F(y) = f(y)g(x_0 - y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$. La mesure de Lebesgue est invariante par la transformation

$$y \to x_0 - y$$

Donc $G(y) = f(x_0 - y)g(y)$ est aussi dans L^1 et $\int F = \int G$.

2. L'inégalité découle de l'inégalité triangulaire.
3. Pour tout x tel que $|f| * |g|(x) < +\infty$, on a par croissance de l'intégrale, toutes les fonctions $f^{\pm} * g^{\pm}(x)$ sont bien définies et finies, et par linéarité (pour des fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$) on a

$$f * g(x) = f^+ * g^+(x) - f^+ * g^-(x) - f^- * g^+(x) + f^- * g^-(x).$$

Maintenant, si f et g sont positives, on peut appliquer le théorème de Fubini positif. La fonction $(x, y) \to F(x, y) := f(y)g(x - y)$ est une fonction positives mesurable pour $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, et donc la fonction section $x \to \int F(x, y)\, dy$ est borélienne sur $\mathbb{R}^d$. De plus, le théorème de Fubini-Tonelli nous permet de dire que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f * g(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} F(x, y)\, dy \Big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} F(x, y)\, dx \Big)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} g(x - y)\, dx \Big) f(y)\, dy = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\, d\lambda \right) . \left(\int_{\mathbb{R}^d} g\, d\lambda \right),\end{aligned}$$

en utilisant que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est invariante par translations. Tous les termes de cette somme sont des fonctions boréliennes, par le théorème de Fubini-Tonelli, d'où le résultat.

$\square$

Remarque 39. *La convolution ne dépend que de la classe de f et g presque partout, au sens suivant : $f_1 = f_2$ λ-p.p. et $g_1 = g_2$ λ-p.p. alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $|\, f_1 \,| * |\, g_1 \,|(x) = |\, f_2 \,| * |\, g_2 \,|(x)$, et si ce nombre est fini, $f_1 * g_1(x) = f_2 * g_2(x)$.*

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, si l'on définit le borélien $A(x)$ par

$$A(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : f_1(x - y)\, g_1(y) \neq f_2(x - y)\, g_2(y)\},$$

on a alors

$$A(x) \subseteq \{y \in \mathbb{R}^d : f_1(x-y) \neq f_2(x-y)\} \cup \{y \in \mathbb{R}^d : g_1(y) \neq g_2(y)\} = (x - \{f_1 \neq f_2\}) \cup \{g_1 \neq g_2\},$$

si bien que

$$\lambda(A(x)) \leq \lambda\left(\{f_1 \neq f_2\}\right) + \lambda\left(\{g_1 \neq g_2\}\right) = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}|\, f_1 \,| * |\, g_1 \,|(x) &= \int |\, f_1(x - y) \,|.|\, g_1(y) \,|\, \mathbb{1}_{{}^cA(x)}(y)\, dy \\ &= \int |\, f_2(x - y) \,|.|\, g_2(y) \,|\, \mathbb{1}_{{}^cA(x)}(y)\, dy = |\, f_2 \,| * |\, g_2 \,|(x).\end{aligned}$$

Si cette quantité est finie, on fait le même raisonnement avec $f_1 * g_1$ et $f_2 * g_2$.

Remarque 40 (Associativité). *Lorsqu'on a affaire à des fonctions boréliennes positives, il n'y a pas trop de danger à écrire que*

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

En effet on a, par le théorème de Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}
(f * g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} dz\, h(z)\, f * g(x - z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} dz\, h(z) \int_{\mathbb{R}^d} dy\, f(y)\, g(x - z - y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} dy\, f(y) \int_{\mathbb{R}^d} dz\, h(z)\, g(x - z - y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} dy\, f(y)\, g * h(x - y)
\end{aligned}$$

qui n'est autre que $f * (g * h)(x)$.

Par contre, le produit de convolution des fonctions boréliennes de signe quelconque (même avec l'hypothèse que tout est convolable) **n'est pas** *associatif en général. On peut le voir en prenant pour f la fonction de Heaviside, qui vaut 0 sur $]-\infty, 0[$ et 1 sur $[0, +\infty[$, pour g la fonction à support compact $[0, 2]$ bornée d'intégrale nulle donnée par $g = 1$ sur $[0, 1[$ et -1 sur $[1, 2]$, et pour h la fonction constante égale à 1.*

Néanmoins, signalons que l'on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 41. *Soit f, g deux fonctions continues à support compact, et $h \in L^1_{loc}$. Alors*

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

En ce qui concerne la bonne définition des termes dans cette proposition, on pourra remarquer que la convolution d'une fonction continue à support compact et d'une fonction localement intégrable est une fonction localement bornée (en fait elle est continue, comme nous le verrons plus loin), et par conséquent c'est une fonction localement intégrable.

On souhaite à présent exhiber des conditions suffisantes pour que deux fonctions f et g soient convolables, et tirer ensuite des propriétés d'intégrabilité de $f*$g. Le bon théorème est le suivant.

Théorème 42 (Young). *Soit $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors f et g sont convolables et $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ avec

$$\| f * g \|_r \leq \| f \|_p \| g \|_q.$$

Démonstration. Voir TD. □

Voici quelques cas remarquables de ce résultat. Soit f et g deux fonctions boréliennes.

1. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ avec $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, alors f et g sont convolables (et $f * g$ est même défini et fini partout, par Hölder), et dans ce cas, $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
2. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, avec pour $p \in [1, +\infty]$, alors f et g sont convolables, et dans cas $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $\| f * g \|_p \leq \| f \|_1 \| g \|_p$.

Vous remarquerez que les cas ci-dessus s'intersectent.

On a vu que parfois la convolution est bien définie partout, même pour des fonctions définies presque partout. De fait, la convolution a tendance à régulariser les fonctions.

Un excellent exemple, sur $\mathbb{R}$, est

$$1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}.$$

On voit que c'est une fonction continue (c'est un cas particulier du résultat général ci-dessous). Avec trois convolution, on aura même une fonction C^1. Sur cet exemple, on voit aussi poindre le théorème de la limite centrale.

3.2 Continuité de la convolée

Théorème 43. *1. La convolution d'une fonction de $L^1(\mathbb{R}^d)$ et d'une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est une fonction continue (bornée, comme on l'a déjà vu).*

2. La convolution d'une fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et d'une fonction continue à support compact est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. Soit $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$ fixés. On a vu que l'application $x \to \tau_x(f)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans L^1, où τ_x désigne la translation par x ($\tau_x(f)(y) := f(y - x)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$). Par conséquent, pour $g \in L^\infty = (L^1)^*$, qui est le dual de L^1, on a, par composition d'applications continues, que

$$x \to \langle \tau_x(f), g \rangle = \int \tau_x(f) g = f * g(x)$$

est une application continue, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc.

Le deuxième point se déduit du premier. Soit f une fonction localement intégrable et g une fonction continue à support compact. Supposons que le support de g soit contenu dans une boule B_1 de rayon R. Pour montrer que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}^d$, il suffit de (et il faut) montrer qu'elle est continue sur tout boule B. Soit donc B une boule de rayon r et soit B_2 la boule de rayon $r + R$. On note $\tilde{f} = f 1_{B_2}$ la fonction f tronquée à B_2. On voit que

$$\forall x \in B, \qquad f * g(x) = \int f(y) g(x-y)\, dy = \int_{B_2} f(y) g(x-y)\, dy = \int \tilde{f}(y) g(x-y)\, dy = \tilde{f} * g(x).$$

Donc $f * g$ coincide sur B avec $\tilde{f} * g$, qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ puisque $\tilde{f}$ est dans L^1 et g est dans L^∞.

□

3.3 Support de la convolée

Lorsqu'on travaille avec des fonctions boréliennes (pas forcément continues), il n'est plus raisonnable de dire que le support est la fermeture de l'ensemble des points où la fonction est non-nulle. (Par exemple $f = 1_{\mathbb{Q}}$ est nulle presque-partout, mais l'ensemble précédemment défini vaut $\mathbb{R}$; or son support devrait raisonnablement être vide).

Pour f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on définit

$$\operatorname{supp}(f) = \bigcap_{U \in \mathcal{O}(f)} (\mathbb{R}^d \setminus U)$$

où $\mathcal{O}(f)$ désigne l'ensemble des ouverts U de $\mathbb{R}^d$ tel que $f(x) = 0$ pour μ-presque tout $x \in U$. On notera que $f = 0$ μ-pp sur $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}(f)$ (pourquoi ?). Le support est donc le plus petit fermé tel que $f = 0$ μ-pp sur le complémentaire.

On peut montrer que si f et g sont deux fonctions convolables, alors

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}.$$

Nous allons plutôt établir le résultat suivant :

Proposition 44. *Soit f une fonction localement intégrable et g une fonction continue à support compact. Alors on a*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g).$$

Démonstration. Soit K le support compact de g. On sait que $f*g$ est continue, donc admet comme support $F = \overline{\{f * g \neq 0\}}$. On pourra vérifier facilement à titre d'exercice que la somme d'un fermé et d'un compact est fermé. Ainsi, $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$ est fermé, et il s'agit de montrer que si $x_0 \notin \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g) = \operatorname{supp}(f) + K$, alors $f * g(x_0) = 0$. On a

$$f * g(x_0) = \int_{x_0 - K} f(y) g(x-y)\, dy = \int_{(x_0-K) \cap \operatorname{supp}(f)} f(y) g(x-y)\, dy$$

or par hypothèse $(x_0 - K) \cap \operatorname{supp}(f) = \emptyset$.

□

3.4 Régularité de la convolée

Théorème 45. *Soit ϕ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ à support compact et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Alors $\phi * g$ est C^∞ et on a*

$$\partial^\alpha(\phi * f) = (\partial \phi) * f$$

sur $\mathbb{R}^d$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

Démonstration. Voir TD. $\square$

3.5 Suites régularisantes et convolution

Definition 6. *On appelle suite régularisante (ou approximation de l'identité) une suite $(j_k)_{k\geq 1}$ de fonction définies sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant les propriétés suivantes : pour tout $k \geq 1$*

$$j_k \geq 0, , \quad \int j_k = 1, \quad j_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \textit{et} \;\; \operatorname{supp}(j_k) \subset B(r_k),$$

avec

$$r_k \to 0 \quad \textit{lorsque } k \to +\infty.$$

La construction classique, à retenir, d'une approximation de l'identité est comme suit. On se donne une fonction J positive, régulière à support compact avec $H > 0$ au voisinage de zéro (par exemple) de sorte que $\int J > 0$. On définit

$$j(x) = \frac{1}{\int J} J(x)$$

de manière à obtenir une fonction positive C_c^∞ d'intégrale 1. On pose alors, pour tout $k \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^d$

$$j_k(x) = k^d j(kx).$$

Pour chaque k la fonction j_k est positive régulière à support compact, et d'intégrale 1. De plus, si le support de J est inclut dans la boule de rayon R, alors celui de j_k est inclus de celui de rayon R/k, et tend donc bien vers zéro lorsque $k \to +\infty$.

Théorème 46. *Soit $(j_k)_{k\geq 1}$ une suite régularisante dans $\mathbb{R}^d$ et soit $p \in [1, +\infty[$.*
a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $j_k * f$ converge fortement vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ lorsque $k \to +\infty$.
b) Si f est continue, alors $j_k * f$ converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$ lorsque $k \to +\infty$.

Dans l'énoncé *a*) ci-dessus, on peut remplacer $\mathbb{R}^d$ par n'importe quelle partie mesurable $X \subset \mathbb{R}^d$, à condition, de prolonger $f \in L^p(X)$ par zero en dehors de x.

Notez que dans les deux cas considérés, comme $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, les fonctions $j_k * f$ sont C^∞. On a donc montré en particulier

- La densité des fonction C^∞ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.
- Que toute fonction continue à support compact peut-être approché par une suite de fonction C^∞ à support compact, uniformément.

Comme conséquence de ce deuxième point, on voit que les fonction C^∞ à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$. On reviendra plus bas sur ce point.

Démonstration. Si f est une fonction localement intégrable, alors on voit que pour (presque tout) $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|j_k * f(x) - f(x)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^d} j_k(y)[f(x-y) - f(x)]\, dy \Big| \leq \int_{R^d} j_k(y)|f(x-y) - f(x)|\, dy.$$

Lorsque f est dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, en utilisant l'inégalité de Jensen et Fubini-Tonelli on voit que

$$\|j_k * f - f\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} j_k(y) \|\tau_y(f) - f\|_p^p\, dy \leq \sup_{|y| \leq r_k} \|\tau_y(f) - f\|_p^p.$$

Ce dernier terme tend bien vers zéro, par continuité (en $y = 0$) de l'action des translations dans L^p.

Dans le cas où f est continue (et $p = \infty$), on a directement que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé,

$$|j_k * f(x) - f(x)| \leq \sup_{|y| \leq r_k} |f(x-y) - f(x)|$$

De cela (et du théorème de Heine) on tire facilement la convergence uniforme sur tout compact.

□

Le résultat suivant, que l'on a déjà effleuré à de nombreuses reprises, est très important.

Théorème 47. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $p \in [1, +\infty[$. Les fonctions C^∞ à support compact inclus dans Ω sont denses dans $L^p(\Omega)$, i.e. pour $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $g_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ tel que*

$$\|f - g_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Il existe une multitude de façons d'approcher ce résultat

- On peut reprendre le schéma de la démonstration du fait que les fonctions continues à support compact dans Ω sont denses dans $L^p(\Omega)$, et
  - soit faire la convolution de 1_K (pour K compact de Ω) avec une suite régularisante
  - soit utiliser une version C^∞ du lemme d'Uryshon
- On peut utiliser le fait que les fonctions continues à support compact dans Ω sont denses dans $L^p(\Omega)$ et pour ces fonctions faire la convolution par une suite régularisante.
- On peut utiliser que les fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, ce qu'on vient de montrer, et donc aussi denses dans $L^p(\Omega)$ (en prolongeant par zéro). Ensuite, pour se ramener à une fonction à support dans Ω, on fait une troncature, en utilisant encore une version C^∞ du lemme d'Urysohn.

On va suivre la deuxième option. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe g continue à support compact $K \subset \Omega$ tel que $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$. Soit j_k une suite régularisante. On pose

$$g_k = j_k * g.$$

Le support dans g_k est inclus dans $K + B_{r_k}$ et donc (suivant un raisonnement topologique fait précédemment), ce support sera bien dans Ω pour k assez grand. De plus, d'après le théorème précédent, pour k assez grand on aura

$$\|g_k - g\|_{L^p(\Omega)} = \|g_k - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon$$

En fait, on a même convergence uniforme sur $\mathbb{R}^n$ de la suite g_k. Ainsi, on a bien, en prenant un k assez grand

$$\|f - g_k\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \|g - g_K\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon.$$

$\square$