Distributions

Dans ce chapitre, Ω désignera un <u>ouvert</u> de $\mathbb{R}^d$. Un cas important sera $\Omega = \mathbb{R}^d$.
L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ à support compact inclus dans Ω sera aussi noté $\mathcal{D}(\Omega)$.

I/ Définitions

Définition (Fonctions test)

L'espace "des fonctions test" est par définition l'espace $\mathcal{D}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ que l'on muni de la notion de convergence suivante :

on dit que la suite $(\phi_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ <u>converge</u> vers $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si

(i) il existe un compact $K \subset \Omega$ tq
$$\forall n \geq 1, \quad \mathrm{supp}(\phi_n) \subset K$$
et

(ii) $\partial^\alpha \phi_n \longrightarrow \partial^\alpha \phi$ uniformément sur Ω pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ étant un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, suivant qu'on considère des fonctions à valeurs réelles ou complexes ; écrivons $\mathbb{C}$ puisque c'est plus général), on peut considérer les formes linéaires sur $\mathcal{D}(\Omega)$, i.e. les applications
$$L : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$
tel que
$$L(\lambda \varphi_1 + \varphi_2) = \lambda L(\varphi_1) + L(\varphi_2) \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega),\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

on a alors deux définitions possibles d'une "distribution"

<u>Définition A</u>

Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui est <u>continue</u> au sens suivant :

<u>si</u> $(\phi_n) \longrightarrow \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$

<u>alors</u> $T(\phi_n) \longrightarrow T(\phi)$

<u>Définition B</u>

Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui est <u>continue</u> au sens suivant :

pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K > 0$ et $r_K \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\mathrm{supp}(\phi) \subset K$, on a :

$$|T(\phi)| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq r_K} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

Def B $\Rightarrow$ Def A est facile

Pour Def A $\Rightarrow$ def B, il faut travailler un peu.

<u>Notation</u> : On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω

C'est un <u>espace vectoriel</u> (ok ?) sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

<u>Définition</u> (Ordre)

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si dans la définition B on peut choisir r_K indépendamment de K (i.e. $\exists r \in \mathbb{N}$ tq $\forall K$ compact $\subset \Omega$, ...) alors on dit que T est d'ordre fini. Le plus petit r correspondant s'appelle l'ordre de T

On peut mettre sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}'(\Omega)$ une topologie.

<u>Definition</u>

On dit qu'une suite $(T_n) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ <u>si</u>

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad T_n(\phi) \longrightarrow T(\phi)$$

On écrit alors que " $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ "

Cette notion peut sembler faible. Cependant, on dispose d'un <u>principe de bornitude uniforme</u> qui permet de justifier la pertinence de cette notion.

Mais dans ce cours, nous utiliserons très peu la convergence de suites de distributions.

<u>Notation</u> (Crochet de dualité)

Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on pose

$$\langle T, \phi \rangle := T(\phi)$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R} \\ (T, \phi) &\longrightarrow \langle T, \phi \rangle \end{aligned}$$

est une <u>forme bilinéaire</u>

Elle est <u>continue</u> au sens où :

<u>si</u> $\begin{cases} T_n \longrightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \phi_n \longrightarrow \phi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \end{cases}$

<u>alors</u> $\langle T_n, \phi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \phi \rangle$

On pourra admettre ce résultat, dont la preuve repose sur le principe de bornitude uniforme mentionné plus haut.

Par définition, $\langle T, \cdot \rangle$ caractérise T.
On verra plus loin que $\langle \cdot, \phi \rangle$ caractérise ϕ, au sens où $(\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ T(\phi) = 0) \Rightarrow \phi \equiv 0$.

II/ Exemples

1) Mesures

Soit μ une mesure borélienne sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, telle que $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact $K \subset \Omega$. (On dit que μ est une mesure de Radon.)
Alors μ peut être vue comme une distribution T_μ définie par :

$$T_\mu(\phi) := \int \phi \, d\mu \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Vérifions que $T_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La linéarité en ϕ est claire car les fonctions continues à support compact sont μ-intégrables.
Ensuite, si $\phi_n \longrightarrow \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il existe $K \subset \Omega$ tel que $\operatorname{supp} \phi_n \subset K$ (et $\operatorname{supp} \phi \subset K$), et

$$\phi_n \longrightarrow \phi \text{ unif sur } K, \text{ en particulier.}$$

Comme la suite (ϕ_n) est uniformément bornée et que $1_K \in L^1(\mu)$ on peut conclure par CV dominée (ou directement par CV uniforme sur K) que $\int_K \phi_n \, d\mu \longrightarrow \int_K \phi \, d\mu$

<u>On a donc bien $T_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$</u>

Pour parler "d'identification", il faudrait vérifier que

$$\underbrace{\mu = \nu}_{\text{mesures}} \iff \underbrace{T_\mu = T_\nu}_{\text{distributions, ie. dans } \mathcal{D}'(\Omega)}$$

On va le voir dans un cas particulier.

2) Fonctions $L^1_{loc}(\Omega)$

Pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on considère T_f définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad T_f(\phi) = \int \phi f$$

C'est bien une distribution. En effet, si $\phi_n \to \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors il existe K compact $\subset \Omega$ tq

$\operatorname{supp} \phi_n \subset K$
$\operatorname{supp} \phi \subset K$ et $\phi_n \to \phi$ uniforme dans K

Alors :
$$|T_f(\phi_n) - T_f(\phi)| \leq \int |\phi_n - \phi||f| = \int_K |\phi_n - \phi||f|$$
$$\leq \left(\int_K |f|\right) \underbrace{\|\phi_n - \phi\|_\infty}_{\to 0}$$

On a donc bien $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

On a mieux : on peut identifier f et T_f au sens suivant :

Prop : L'application linéaire

$$L^1_{loc}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$
$$f \longrightarrow T_f$$

est injective

Démonstration : [Lieb-Loss p 138]

Dorénavant nous identifierons une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et la distribution correspondante sur Ω.
$(L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega))$ ↳ "$f = T_f$" pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

3) Masse de Dirac et généralisation

Un exemple simple de mesure de Radon est une masse de Dirac en un pt $x_0 \in \mathbb{R}^d$, que l'on identifie à la distribution suivante :

$$\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ donnée par}$$

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On voit que c'est une distribution d'ordre zéro puisque, si $\operatorname{supp} \phi \subset K$ on a

$$|\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle| \leq \sup_{x \in K} |\phi(x)|$$

Rq On peut aussi définir, sur $\mathbb{R}$, pour $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\langle \delta_{x_0}^{(m)}, \phi \rangle = \delta_{x_0}^{(m)}(\phi) = \phi^{(m)}(x_0) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

On voit que $\delta_{x_0}^{(m)}$ est une distribution d'ordre m sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement, si Σ est une surface régulière de $\mathbb{R}^d$, alors il existe une mesure "volume" $d\sigma$ sur Σ (qui s'obtient par les paramétrisations locales de Σ) et alors T_Σ défini par

$$T_\Sigma(\phi) = \int_\Sigma \phi \, d\sigma \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

est bien une distribution sur $\mathbb{R}^d$.

Regardons le cas particulier $\Sigma = H = \{x \in \mathbb{R}^d ;\ x_n = 0\}$
$= \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^d$

Alors on pose

$$T_H(\phi) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi(x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, 0)\, dx_1 \dots dx_{d-1}$$

On a alors, si $\operatorname{supp}(\phi) \subset K$

$$|T_H(\phi)| \leq \int_{K \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})} |\phi(x_1, \dots, x_{d-1}, 0)|\, dx_1 \dots dx_{n-1}$$

$$\leq \lambda(K \cap H) \sup_{x \in K} |\phi(x)|$$

mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{d-1} \simeq H$

4) Valeurs principales

Voir TD.

III/ Dérivées de distributions

Commençons par dériver une fois :

Définition Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $j \in \{1, \dots, d\}$

Alors $\partial_{x_j} T$ est la distribution définie par

$$\langle \partial_{x_j} T, \phi \rangle := -\langle T, \partial_{x_j} \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

C'est bien une distribution puisque $\phi_n \longrightarrow \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ entraîne que $\partial_{x_j}\phi_n \longrightarrow \partial_{x_j}\phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Comme $C^1(\Omega) \subset L^2_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ il est naturel de se demander si notre définition est cohérente avec celle de la dérivée de fonctions C^1.
C'est le cas, puisque ; pour $f \in C^1(\Omega)$ on a,
$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle \partial_{x_j} T_f, \phi \rangle := \langle T_f, \partial_{x_j} \phi \rangle$$
$$= \int_\Omega \partial_{x_j} \phi \, f$$

intégration par partie pour des fcts régulière et ϕ à support compact $\longrightarrow$

$$= - \int \phi \, \partial_{x_j} f =: \langle T_{\partial_{x_j} f}, \phi \rangle$$

c'est à dire $\partial_{x_j} T_f = T_{\partial_{x_j} f}$. Ok !

On verra plus loin un raffinement de cette observation.

On peut faire la même chose avec des dérivées d'ordre supérieur.

<u>Définition</u>

Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice on définit la distribution dérivée $\partial^\alpha T$ par

$$\langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle$$

Pour $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, vue comme une distribution sur Ω, on a encore que la dérivée usuelle $\partial^\alpha f$ et la dérivée distribution $\partial^\alpha T_f$ coïncident pour $|\alpha| \leq k$

en effet, pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\quad$ ($\underset{\uparrow \text{compact}}{\operatorname{supp}\phi} \subset \Omega$)

$$\langle \partial^\alpha T_f, \phi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, \partial^\alpha \phi \rangle$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int \partial^\alpha \phi \; f$$

$$\text{IPP} \quad = \int \phi \, \partial^\alpha f$$

$$= \langle T_{\partial^\alpha f}, \phi \rangle$$

On peut donc dériver, "au sens des distributions" une fonction $f \in L^2_{loc}(\Omega)$ autant de fois que l'on veut ! Est-ce sérieux ? En fait, ça l'est, et le cadre $\mathcal{D}(\Omega)$ / $\mathcal{D}'(\Omega)$ que nous avons introduit est justement motivé par le souci d'avoir une théorie satisfaisante de dérivées généralisées.

Regardons quelques exemples.

Sur $\mathbb{R}$, prendons la fonction $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(Heaviside)

Alors ~~dans~~ $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on a $h' = \delta_0$

en effet, pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ on a

$$\langle h', \phi \rangle = - \langle h, \phi' \rangle = -\int h \phi'$$

$$= -\int_0^\infty \phi' = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle$$

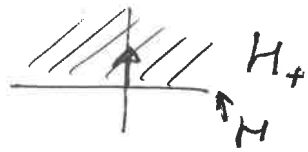
Si on continue, on voit que

$$h'' = \delta_0' = \delta_0^{(1)} \text{ tel qu'on l'a défini plus haut}$$

Regardons en dimension supérieure :

soit $H = \{x \in \mathbb{R}^d,\ x_d = 0\}$

$H_+ = \{x \in \mathbb{R}^d,\ x_d \geq 0\}$ $\hookrightarrow H = \partial H_+$



Alors $1_{H_+} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

et sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ on a $\begin{cases} \partial_{x_i} 1_H = 0 & \text{si } i = 1 \dots d \\ \partial_{x_d} 1_H = T_H & \text{(défini plus haut)} \end{cases}$

intégration sur H

En effet on a :

$$\langle \partial_{x_i} 1_{H_+}, \phi \rangle = - \langle 1_{H_+}, \partial_{x_i} \phi \rangle$$

$$= - \int_{\{x_d \geq 0\}} \partial_{x_i} \phi(x)\, dx_1 \dots dx_{d-1}\, dx_d$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} - \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \partial_{x_i} \phi(x_1, \dots, x_d)\, dx_1 \dots dx_d$$

si $i < d$, $= 0$ (par Fubini et IPP)

si $i = d$ par Fubini $= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi(x_1, \dots, x_{d-1}, 0)\, dx_1 \dots dx_{d-1}$

$$= \langle T_H, \phi \rangle$$

Sur $\mathbb{R}^d$, on a envie de poser

$$\nabla T := (\partial_{x_1} T, \dots, \partial_{x_d} T) \in \mathcal{D}'(\Omega)^d$$

le "gradient distribution" étant défini par

$$\langle \nabla T, \underbrace{(\phi_1, \dots, \phi_d)}_{\in \mathcal{D}(\Omega)^d} \rangle = (\langle \partial_{x_1} T, \phi_1 \rangle, \dots, \langle \partial_{x_d} T, \phi_d \rangle) \in \mathbb{C}^d$$

Dans l'exemple précédent :

$$\nabla 1_{H^+} = (0, \dots, 0, T_H)$$
$$= \text{"} T_H \, e_d \text{"}$$

o — o — o — o — o — o

On va maintenant établir un lemme technique qui sera très utile pour étudier les liens entre distributions, translations et convolution.

<u>On notera</u> ϕ_y la translation de la fonction ϕ par un vecteur $y \in \mathbb{R}^d$

<u>ie</u> $\phi_y(z) = \phi(z-y) \quad \forall z \in \mathbb{R}^d$
$= (\tau_y \phi)(z)$

<u>Lemme</u>

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{O}_\phi \subset \mathbb{R}^d$ l'ensemble

$$\mathcal{O}_\phi := \{ y \in \mathbb{R}^d ; \operatorname{supp}(\phi_y) \subset \Omega \}.$$

On voit que $\mathcal{O}_\phi$ est un voisinage ouvert de 0.
Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors la fonction

$$y \longrightarrow T(\phi_y)$$

est une fonction C^∞ sur $\mathcal{O}_\phi$. Mieux :

Si on désigne par ∂_y^α les dérivés (partielles) par rapport à la variable y, on a, sur $\mathcal{O}_\phi$,

$$\partial_y^\alpha \left(T(\phi_y) \right) = (-1)^{|\alpha|} T\left((\partial^\alpha \phi)_y \right) = (\partial^\alpha T)(\phi_y)$$

Et pour $\psi \in L^1(\mathcal{O}_\phi)$, ψ à support compact, on a

$$\int_{\mathcal{O}_\phi} \psi(y)\, T(\phi_y) = T(\psi * \phi)$$

<u>Rq</u> : si $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{O}_\phi = \mathbb{R}^d$ et pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle f, \phi_y \rangle = \int f(x)\, \phi(x-y)\, dy$$
$$= f * \tilde{\phi}(y) \qquad \tilde{\phi}(z) = \phi(-z)$$

+ loin

<u>Démonstration du lemme</u> : voir [Lieb-Loss, p. 142]

<u>Notons</u> pour $p \in [1, +\infty]$,

$$W^{1,p}_{loc}(\Omega) = \left\{ f \in L^p_{loc}(\Omega) ;\ \text{pour tout } i = 1, \dots, d,\ \partial_{x_i} f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ appartient à } L^p_{loc}(\Omega) \right\}$$

<u>i.e</u> $\exists\, g_i \in L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ tq

$$\partial_{x_i} f = T_{g_i}$$

càd $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int \phi\, g_i = -\int (\partial_{x_i} \phi)\, f$$

On note

$$\nabla f = (\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_d} f) = (g_1, \dots, g_d)$$

Théorème (fondamental du calcul)

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On se donne $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $\phi_{ty} \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour tout $t \in [0,1]$.
Alors :

$$T(\phi_y) - T(\phi) = \int_0^1 \sum_{j=1}^d y_j (\partial_j T)(\phi_{ty})\, dt$$

En particulier, si $f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ et presque-tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$f(x+y) - f(x) = \int_0^1 y \cdot Df(x+ty)\, dt$$

Démo. : voir [Lieb-Loss, p 143]

On peut maintenant préciser l'équivalence entre dérivée distribution et dérivée classique.

Théorème : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $G_i := \partial_{x_i} T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, $i = 1, \dots, d$.

On a alors l'équivalence entre

(i) T "est" une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$

(ii) $\forall i = 1, \dots, d$, G_i "est" une fonction $C^0(\Omega)$, notée g_i.

Et si on a (i) et (ii), on a $g_i = \partial_{x_i} f$ au sens classique, $\forall i = 1, \dots, d$

Rq : Attention au "est". Par ex., dans le (i), cela veut dire "T est une distribution tq $\exists F \in L^1_{loc}$ avec $T = T_F$ et dans la classe de F (pp sur Ω) il y a une fonction f qui est C^1 sur Ω"

Démonstration : voir [Lieb-Loss p 144]

Voici une conséquence

Prop (les distributions à dérivées nulles sont constantes)

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec Ω un ouvert connexe sur $\mathbb{R}^n$.
Alors si $\forall i = 1, \dots, d$ on a $\partial_{x_i} T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$,
il existe $c \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que $T = c 1_\Omega$, ie

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad T(\phi) = c \int_\Omega \phi$$

Démo : Par le théo. précédent T est une fonction C^1 sur Ω que l'on notera f. Celle fonction vérifie
$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$, sur tout Ω
Comme Ω est connexe (= connexe par arcs)
on a bien f constante sur Ω

$\blacksquare$

IV/ Multiplication et convolution avec des fonctions C^∞

On ne peut pas donner de sens, en général, à la multiplication de deux distributions. Mais si l'une d'entre elles est une fonction C^∞, alors ça va.

En effet si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et si $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ alors on peut définir ψT par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (\psi T)(\phi) := T(\psi \phi)$$

ie $\langle \psi T, \phi \rangle := \langle T, \psi \phi \rangle$

On a bien $\psi T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, ψT est bien définie puisque $\psi \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et si $\phi_n \longrightarrow \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ alors $\psi \phi_n \longrightarrow \psi \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (ok ?) et donc $(\psi T)(\phi_n) \longrightarrow (\psi T)(\phi)$.

On remarque de plus que dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ on a : pour $i = 1, \dots, d$

$$\partial_{x_i}(\psi T) = \underset{\in \mathcal{C}^\infty}{\psi} \cdot \underset{\in \mathcal{D}'(\Omega)}{(\partial_{x_i} T)} + \underset{\in \mathcal{C}^\infty}{(\partial_{x_i} \psi)} \cdot \underset{\in \mathcal{D}'(\Omega)}{T}$$

en effet : $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\langle \partial_{x_i}(\psi T), \phi \rangle &= -\langle \psi T, \partial_{x_i} \phi \rangle \\
&= -\langle T, \psi \partial_{x_i} \phi \rangle \\
&= -\langle T, \partial_{x_i}(\psi \phi) - (\partial_{x_i} \psi) \phi \rangle \\
&= -\langle T, \partial_{x_i}(\psi \phi) \rangle + \langle T, (\partial_{x_i} \psi) \phi \rangle \\
&= \langle \partial_{x_i} T, \psi \phi \rangle + \langle T, (\partial_{x_i} \psi) \phi \rangle \\
&= \langle \psi \partial_{x_i} T, \phi \rangle + \langle (\partial_{x_i} \psi) T, \phi \rangle \\
&= \langle \psi (\partial_{x_i} T) + (\partial_{x_i} \psi) T, \phi \rangle \quad \text{QED}
\end{aligned}$$

Regardons le cas où $T = f \in L^1_{loc}(\Omega)$

Alors pour $\psi \in C^\infty(\Omega)$, on a encore $\psi f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et, au sens des distributions :

$$\partial_{x_i}(\psi f) = (\partial_{x_i}\psi) f + \psi(\partial_{x_i} f)$$

On va maintenant définir la convolution entre $\psi \in C^\infty$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Rappelons que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, alors f et ϕ sont convolable, avec $f * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

On a :
$$\begin{aligned} \phi * f(x) &= \int \phi(x-y) f(y)\,dy \\ &= \int \tilde{\phi}(y-x) f(y)\,dy \quad \text{où } \tilde{\phi}(z) := \phi(-z) \ \forall z. \\ &= \int \tilde{\phi}_x(y) f(y)\,dy \\ &= \langle f, \tilde{\phi}_x \rangle \end{aligned}$$

<u>Définition</u>

Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on définit, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\phi * T(x) := T(\tilde{\phi}_x)$$

où $\tilde{\phi}_x$ désigne la fonction $z \longrightarrow \phi(x-z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

Cela est cohérent avec le cas $T = T_f$ $f \in L^1_{loc}$ mentionné plus haut.

<u>Prop</u> : Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\phi * T$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d$.

Et pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on a :

$$\langle \phi * T, \psi \rangle = \int (\phi * T)\, \psi$$
$$= \langle T, \tilde{\phi} * \psi \rangle$$

<u>Démonstration</u> cela découle du <u>Lemme</u> technique montré plus haut. En effet on a ici $\mathcal{O}_\phi = \mathbb{R}^d$ et on a alors que $x \longrightarrow T(\tilde{\phi}_x)$ est une fct C^∞

de plus, on avait établit que

$$T(\underbrace{\tilde{\phi} * \psi}_{= \psi * \tilde{\phi}}) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\, T(\tilde{\phi}_y)\, dy$$
$$= \int \psi\, (\phi * T)$$
$$= \langle \phi * T, \psi \rangle$$

$\boxtimes$

<u>Theo</u> : (Approximation par des fct C^∞)

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $(j_k)_k$ une suite d'approximation de l'identité

Alors $\quad j_k * T \xrightarrow[k \to \infty]{} T \quad$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

<u>Rq</u> : On a bien $j_k * T \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^n)$

<u>Demo</u> :

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

on a : $\quad \langle j_k * T, \phi \rangle = \langle T, \tilde{j}_k * \phi \rangle$

On voit que $(\tilde{j}_k)$ est encore une suite d'approximation de l'identité

Donc $(\tilde{j}_k * \phi)_{k\geq 1}$ est une suite de fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ayant leur supports inclus dans un certain compact K.

De plus $\tilde{j}_k * \phi \longrightarrow \phi$ unif sur $\mathbb{R}^d$

et de même $\partial^\alpha(\tilde{j}_k * \phi) = \tilde{j}_k * \partial^\alpha \phi \longrightarrow \partial^\alpha \phi$ unif.

Donc $\underline{\tilde{j}_k * \phi \longrightarrow \phi \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$

et par definition

$$\langle \tilde{j}_k * \phi, T \rangle \longrightarrow \langle T, \phi \rangle$$

on a donc bien $j_k * T \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ ∎

On peut approcher par des fonction $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Plus généralement

<u>Théo</u> : (Approx. par des fcts $C_c^\infty(\Omega)$)

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors il existe $(g_k) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tel que

$$g_k \longrightarrow g \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

<u>Démo</u> : On va faire des troncatures supplémentaires

Ecrivons $\Omega = \bigcup_{k\geq 1} K_k$ K_k compact et $\subset \{d(\cdot, \partial\Omega) \geq \frac{1}{k}\}$ $\subset \Omega$

Par exemple :

fermé $\subset \Omega$

$$K_k = \{x \in \mathbb{R}^d ; d(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \tfrac{1}{k}\} \cap B(0,k)$$

Soit $\chi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ avec $\chi_k \equiv 1$ sur K_k

et $\operatorname{supp}(\chi_k) \subset \{d(\cdot, K_k) \leq \frac{1}{4k}\} \cap \Omega$

ça dépende peu de K_k

Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\chi_k T$ peut être considéré comme une distribution sur $\mathbb{R}^d$ tout entier, donné par :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) : \quad \langle \chi_k T, \psi \rangle = \langle T, \underbrace{\chi_k \psi}_{\in \mathcal{D}(\Omega)} \rangle$$

(On vérifie qu'avec cette déf., $\chi_k T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$)

On se donne comme précédemment une approx de l'identité (j_k). On s'arrange pour que $\operatorname{supp}(j_k) \subset B(\frac{1}{4k})$

On pose alors : $\forall k \geq 1$:

$$g_k := j_k * (\chi_k T)$$

càd

$$g_k(x) = T(\chi_k (\widetilde{j_k})_x)$$

On a : $\operatorname{supp}((\widetilde{j_k})_x) \subset x + \operatorname{supp}(\widetilde{j_k}) \subset x + B(\frac{1}{4k})$

Donc si $d(x, K_k) > \frac{1}{2k}$ alors $\operatorname{supp}((\widetilde{j_k})_x) \cap \operatorname{supp}(\chi_k) = \emptyset$ (*)

$$\Longrightarrow g_k(x) = 0$$

(*) : en effet s'il existe $y \in \mathbb{R}^d$ tq

$y \in \operatorname{supp}(\widetilde{j_k})$ et $y \in \operatorname{supp}(\chi_k)$

$\Downarrow$ $|y - x| \leq \frac{1}{4k}$ $\qquad$ $\Downarrow$ $d(y, K_k) \leq \frac{1}{4k}$

alors $d(x, K_k) \leq \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} = \frac{1}{2k}$.

On a donc établi que

$$\operatorname{supp}(g_k) \subset \{x ; d(x, K_k) \leq \tfrac{1}{2k}\} \subset \Omega$$

<u>ie</u> g_k est à support compact $\subset \Omega$.

La fin de la démonstration est identique, car on localise avec un ϕ qui a un support compact fixe $\subset \Omega$

Alors pour k assez grand, $\chi_k \equiv 1$ sur $\operatorname{supp} \phi$

et donc
$$\begin{aligned} \langle g_k, \phi \rangle &= T(\tilde{j}_k * (\chi_k \phi)) \\ &= T(\tilde{j}_k * \phi) \end{aligned}$$

$\boxtimes$

<u>Quelques remarques</u> sur les approximations de l'identité et la convolution.

- Si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on a pour $x \in \mathbb{R}^d$
$$\begin{aligned} \phi * \delta_0(x) &= \langle \delta_0, \tilde{\phi}_x \rangle = \tilde{\phi}_x(0) \\ &= \tilde{\phi}(-x) \\ &= \phi(x) \end{aligned}$$

<u>càd</u> $\underline{\phi * \delta_0 = \phi}$

- Si (j_k) est une approx. de l'identité dans $\mathbb{R}^d$, alors
$$j_k \longrightarrow \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

En effet :

si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ $\int j_k(x)\,(\phi(x) - \phi(0))\,dx \longrightarrow 0$

- Enfin si $T_k \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Alors pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$
$$\phi * T_k \longrightarrow \phi * T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

en effet pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ qcq on a

$$\langle \phi * T_k, \psi \rangle = \langle T_k, \tilde{\phi} * \psi \rangle \longrightarrow \langle T, \tilde{\phi} * \psi \rangle$$
$$\parallel$$
$$\langle \phi * T, \psi \rangle$$

- On a donné un point de vue concis sur le théo d'approximation par convolution dans le cas de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

  Si (j_k) est approt de l'identité, alors pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

  $$j_k * \phi \longrightarrow \delta_0 * \phi = \phi \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Cela dit, dans le cas de fcts $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ on a mieux, puisqu'on a établi la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.

V/ Remarques en vrac en guise de conclusion

Il y a de nombreux résultats et de nombreuses opérations concernant les distributions que nous n'avons pas abordé. Le lecteur curieux pourra consulter le polycopié de François Golse, disponible sur sa page web. En particulier, nous n'avons pas étudié l'ordre des distributions. Voici une petite sélection de choses intéressantes.

Formule des sauts en dimension 1 et dimension d

dim 1 C'est une extension de ce qu'on a vu pour la fonction d'Heaviside.

Voir TD

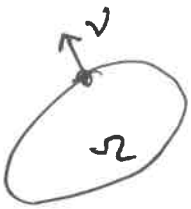
dim d C'est plus compliqué

On a vu que si $f = 1_{H_+}$ $\quad H_+ = \{x \in \mathbb{R}^d, x_d \geq 0\}$

$H = \{x_d = 0\}$

alors $\begin{cases} \partial_{x_d} f = T_H & \leftarrow \text{intégration sur } H \\ \partial_{x_i} f = 0 & \text{si } i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$

Plus généralement, si Ω est un ouvert à bord C^2 ($\partial\Omega$ est une hypersurface régulière) alors $\forall j = 1, \dots, d$:



$$\partial_{x_j} 1_\Omega = -\nu_j \sigma \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

où $\nu_x = (\nu_1(x), \dots, \nu_d(x))$ est le vecteur unitaire en $x \in \partial\Omega$ pointant vers l'extérieur

et $\sigma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ la "distribution de simple couche", i.e. l'intégration sur $\partial\Omega$:

$$\langle \sigma, \phi \rangle = \int_{\partial\Omega} \phi \, d\sigma$$ ← mesure de surface sur $\partial\Omega$.

A partir de cela, on peut établir une formule des sauts en dimension n.

Distributions positives

On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution positive si $T(\phi) \geq 0$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tq $\phi \geq 0$ sur Ω.

exemple - exercice : soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ (notez que $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ puisque f est continue) alors sa dérivée seconde f'' dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une distribution positive.

Le résultat remarquable est qu'une distribution positive $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ s'identifie à une mesure de radon positive μ sur Ω : $T = \mu$, i.e. :

$$\langle T, \phi \rangle = \int \phi \, d\mu$$

mesure borélienne sur Ω tq $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Support d'une distribution

La notion de support d'une distribution généralise celle de support d'une fonction L^2_{loc}

Soit $T \in \mathcal{D}(\Omega)$. Le support de T est le plus petit fermé tel que $T_{|\Omega \setminus F} = 0$ ie.

$$\operatorname{supp}(T) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(T)} F$$

où $\mathcal{F}(T) = \{ F \text{ fermé de } \Omega \text{ tq } T_{|\Omega \setminus F} = 0 \}$

Ici on a utilisé la notion de <u>restriction</u> : si $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ et U est un ouvert, $U \subset \Omega$, alors $T_{|U}$ est la distribution sur U définie par :

$$\langle T_{|U}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \underset{\mathcal{D}(\Omega)}{\underset{\cap}{\mathcal{D}(U)}}$$

En d'autres termes on a, pour $x \in \Omega$:

$x \notin \operatorname{supp}(T) \iff \exists\, U_x$ ouvert $\subset \Omega$, $U_x \ni x$ tel que $T_{|U_x} = 0$

ie $\langle T, \phi \rangle = 0$ pour tout ϕ tq $\operatorname{supp} \phi \subset U_x$

<u>Attention</u> : Pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\phi \equiv 0$ sur $\operatorname{supp} T$ $\not\Rightarrow$ $\langle T, \phi \rangle = 0$

<u>contre-ex sur $\mathbb{R}$</u> : Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $\phi(t) = t$ sur $\mathcal{V}(0)$

et soit $T = \delta_0'$

on montre que $\operatorname{supp} \delta_0' = \{0\}$

on a : $\phi(0) = 0$ mais $\delta_0'(\phi) = 1$

<u>Autre exemple</u> si Σ ~~hyperplane~~ hyperplane et σ distribution de simple couche sur Σ, alors

$$\mathrm{supp}(\sigma) = \Sigma$$

<u>Rq</u>: Les distributions à support compact sont sympathiques à utiliser (elles sont par ex. d'ordre fini). Voir + loin.

On montre que pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

on a : $\mathrm{supp}(\phi * T) \subset \mathrm{supp}(T) + \mathrm{supp}(\phi)$

Produit de convolution de distributions

On note

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \{ T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; \ \mathrm{supp}(T) \text{ compact} \subset \Omega \}$$

Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tq $\chi \equiv 1$ au voisinage de $\mathrm{supp}(T)$

Alors si $\underline{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)}$ [Pas néc. à support compact]

on a $\phi \chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on peut poser

$$\langle T, \phi \rangle := \langle T, \chi \phi \rangle$$

On montre que le résultat obtenu est indépendant du choix de χ. Ainsi T est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, et on montre qu'elle possède encore de bonnes propriétés de continuité :

Pour une distribution $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, soit $\tilde{S} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ définit par $\langle \tilde{S}, \phi \rangle = \langle S, \tilde{\phi} \rangle$ où $\tilde{\phi}(z) = \phi(-z)$

Si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ (et donc $\tilde{S} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$)

alors on a vu que $\tilde{S} * \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

pas nec. à support compact

On peut alors définir la convolution $\underline{\mathcal{E}' * \mathcal{D}'}$ qui généralise $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) * \mathcal{D}'$ comme suit :

Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors

$T * S$ est défini par : $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle T * S, \phi \rangle = \langle T, \tilde{S} * \phi \rangle$$

On montre que $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

On aurait aussi pu dire que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\tilde{T} * \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

(le support est compact)

et ainsi on peut poser :

$$\langle S * T, \phi \rangle = \langle S, \underbrace{\tilde{T} * \phi}_{\in \mathcal{D}(\Omega)} \rangle$$

On vérifie que $S * T = T * S$.

On a encore $\operatorname{supp}(S * T) \subset \operatorname{supp}(S) + \operatorname{supp}(T)$

Notez que, pour tout $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ on a :

$$S * \delta_0 = S$$

à support compact.